

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ: 69.04:531.01

Қолжазба құқығында

**МӘДІБАЙҰЛЫ ЖҰМАБАЙ**

**Механикалық жүйелер ақауларының идентификациясы**  
6D060300 - Механика

философия докторы (PhD)  
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:  
ф.-м.ғ. докторы, профессор Кангужин Б.Е

Шетелдік ғылыми кеңесші:  
Dr. Sergey Tikhonov (Icrea CRM, Spain, Barcelona)

**Қазақстан Республикасы**

**Алматы, 2022 ж.**

## МАЗМҰНЫ

Қысқартулар мен белгілеулер	3
Кіріспе	4
<b>1 ЖІҢШКЕ СЫРЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕР</b>	<b>8</b>
1.1 Жіңішке майысқан сырықтың моделі	8
1.2 Серпімділік теориясының сызықты есебі	9
1.3 Жіңішке әлсіз майысқан сырықтың шешімінің асимптотикасы	11
1.4 Шекті теңдеулер жүйесі	15
1.5 Сырықтардың байланысу моделі	16
1.6 Серпімділік теориясының теңдеулері	17
1.7 Сырықтардың жалғануы кезіндегі шекті теңдеулер жүйесі.	18
<b>2 БІРНЕШЕ СЫРЫҚ БӨЛІКТЕРІНЕН ҚҰРАЛҒАН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ БОЙЛЫҚ ТЕРБЕЛІСІ</b>	<b>21</b>
2.1 Дифференциалдық операторлардың Лагранж формуласы және бұтадағы максимал оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы	21
2.2 Бұтадағы максимал оператордың анықталуы	22
2.3 Бұтада анықталған дифференциалдық операторлардың Лагранж формуласы	23
2.4 $\Lambda_{\max}$ оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы	28
2.5 $\Lambda_{\max}$ оператордың қисынды тарылуы	34
2.6 Анықталған қисынды тарылудың Грин функциясы	34
2.7 Қисынды тарылуларды сипаттау	36
<b>3 ШЕКАРАЛЫҚ БЕКІТІЛУДІ БІРМӘНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУДЕ МЕНШІКТІ ЖИІЛІКТІҢ МИНИМАЛ САНЫН АНЫҚТАУ. ҚОСЫМША МЫСАЛДАР</b>	<b>40</b>
3.1 Көпірдің сындарлы жылдамдығы	40
3.2 Майысқан құбырдан сұйықтық аққан кездегі орнықтылық есебі	54
3.3 Майысқан құбырдың сұйықтық аққан кездегі меншікті жиілігін есептеу	58
3.4 Сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтау	61
3.5 Меншікті жиіліктердің минимал мөлшерін қолдана отырып құбырдың бекітілуін идентификациялау	71
<b>ҚОРЫТЫНДЫ</b>	<b>79</b>
<b>ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ</b>	<b>80</b>

## Белгілеулер

$u$  – сырықтың ығысуы

$\omega$  – тербеліс жиілігі

$E$  – серпімділік модулі

$\varepsilon$  – деформация,

$\sigma$  – кернеу

$t$  – уақыт

$l$  – сырықтың ұзындығы

$J$  – инерция моменті

$\rho$  – ауаның тығыздығы

$V$  – желдің жылдамдығы

$V^c$  – желдің сындарлы жылдамдығы

$U$  – сұйықтың жылдамдығы

$C(\alpha)$  – аэродинамикалық эксперименттерден алынған коэффициент

$m\ddot{y}$  – инерциялық күш

$r\dot{y}$  – демпфер күші

$ky$  – серпімділік күші

$m$  – құбырдың массасы

$M$  – сұйықтықтың массасы

$r$  – құбырдың сыртқы радиусы

$r_i$  – ішкі радиус

$\rho_0$  – сұйықтық тығыздығы

$p_0$  – құбырдың сындарлы қысымы

## Кіріспе

Диссертацияның тақырыбы механикалық жүйелердегі сырықтар, құбырлар және басқа да жұқа, сәл иілген құрылымдардың буындық құрамын зерттеуге арналған. Онда берілген меншікті жиіліктер жиынтығындағы аталған механикалық жүйелердің шекаралық бекітулерін анықтауға басты назар аударылады. Мұндай мәселелер акустикалық диагностика есептерімен байланысты болғандықтан, бұл жұмыс теориялық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да ғылыми қызығушылық тудырады.

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы.** Жіңішке сырықтар мен олардың буындарына қатысты мәселелер барлық механикалық жүйелерде кездеседі. Теориялық негіздерін А.Клебш қалаған сырықтар теориясын одан әрі дамытуда С.П.Тимошенко, А.И.Лурье, Г.Ю.Джанелидзе, С.Г.Лехницкий, Ю.Н.Работнов сияқты ғалымдар көрнекті рөл атқарды. Техникалық теориялар инженерлік есептеулерде кең қолданылғанымен, бір өлшемді модельдердің нақты нысандарға сәйкестігі туралы мәселе әлі толық зерттелмеген. Сол сияқты, қойылатын шарттардың есептеу модельдерінің нақты нысандарына сәйкестігіне сирек назар аударылған.

Бұл диссертациялық жұмыс әр түрлі бөліктерден құралған жіңішке сырықтардың еркін тербелістерін зерттеуге бағытталған. Яғни осындай құрылымдардың меншікті жиіліктерін және меншікті тербелістерін анықтауға баса көңіл бөлінген. Меншікті жиіліктер зерттелетін құрылымның бастапқы геометриялық және физикалық сипаттамаларына ғана тәуелді емес екендігі белгілі. Атап айтқанда, оларға шекаралық бекітулер және бірнеше сырықтар арасындағы байланыс түйіндеріндегі бекітулер айтарлықтай әсер етеді. Ендеше, осындай зерттеулер аясында берілген типтегі модельдерді құрудың маңызы зор. Сондықтан, жіңішке сырықтың немесе олардың алдын – ала берілген меншікті жиіліктер арқылы бөлшектенген мүшелеріне таңдау жасалынады. Меншікті жиіліктер жиынтығымен шекараны бекіту әдісін анықтау акустикалық диагностика мәселелеріне жатады.

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Әдетте, техникалық жөндеу орталықтарының мамандары автомобилдің қозғалтқышын ашпай-ақ, қозғалтқыштың дыбыстарынан жөндеуді қажет ететін бөлшегін анықтайды. Басқаша айтқанда, қозғалтқыштың ақауын құлағымен “естиді”. Мұндай мәселелер акустикалық диагностикаға жатады және әртүрлі техникалық салаларда жиі пайдаланылады.

Диссертацияда зерттелетін тақырып аталған акустикалық диагностика есептермен тікелей байланысты, қарапайым жағдайда сырықтың меншікті жиіліктері арқылы сырықтың шеттері қалай бекітілгенін анықтау проблемасы туындайды. Бұл мәселе екі есепке бөлінеді. Алдымен сырықтың шеттерінің бекітілгенін бір мәнді табуға қанша меншікті жиілік қажеттігі анықталады. Содан соң, меншікті жиіліктердің санын анықтағаннан кейін, сырықтың шеттерінің бекітілуі әдісі қарастырылады. Сырықтың шеттері әр түрлі бекітілуі мүмкін: еркін тіректі, еркін ұшты, серпімді бекітілген, қатаң

бекітілген. Әр түрлі бекітілу үшін қажетті меншікті жиіліктердің саны әр түрлі болуы ықтимал. Жалпы жағдайда конструкцияның құрамында бірнеше сырық болуы мүмкін. Сондықтан, бір сырыққа қойылған есептерді қарастыру өзекті мәселе болып табылады.

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты.** Бұл диссертациялық жұмыста жіңішке әр түрлі бөліктерден құралған сырықтардың еркін шағын тербелістері зерттеледі. Бұл жағдайда осындай құрылымдардың меншікті жиіліктерін және меншікті тербелістерін анықтау - маңызды мәселе. Жоғарыда атап өткеніміздей, меншікті жиіліктер зерттелетін құрылымның бастапқы геометриялық және физикалық сипаттамаларына ғана тәуелді емес. Шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықталып, қосымша мысал қарастырылады. Көздеген мақсатқа жету үшін диссертациялық жұмыста келесі зерттеу міндеттері қойылады.

**Зерттеу міндеттері:**

1. Жіңішке сырықтың (өзара жалғанысқан жіңішке сырықтар конструкциясының) иілу тербелісін, көлденең тербелісін және бұралмалы тербелістерін сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер алу;

2. Жіңішке сырықтың (өзара жалғанысқан жіңішке сырықтар конструкциясының) еркін шағын тербелісінің меншікті жиілігін анықтау алгоритімін жасау;

3. Ақырлы меншікті жиіліктер жиынтығы бойынша жіңішке сырықтың шекаралық бекітілуін конструктивті түрде қалпына келтірудің алгоритімін құру.

**Зерттеу нысаны** - жіңішке сырықтар, түйінге байланған бірнеше сырықтар, көпірлер, иілген құбыр.

**Зерттеу пәні** болып сырықтар теориясы, техникалық диагностика, серпімділік теориясы, теориялық механика, техникалық механика, графтар теориясы саналады. Зерттеулер деформацияланатын қатты дене және тұтас орта механикасындағы кездесетін деректерге негізделген көзқарастарға сәйкес жүргізіледі.

**Зерттеу әдістеріне** Клебштің жіңішке сырықтар теориясы, Корн бағалауы, Дирихле шарты, Кирхгоф шарттары, Тимошенконың белгілі иілу және көлденең тербеліс теңдеулері, Ильгамовтың кері есептері, сырықтардан құралған граф үшін статиканың кері есебі енеді.

**Зерттеу нәтижесінің теориялық және практикалық маңыздылығы:** сырықтар иілуінің серпімділік теориясындағы үш өлшемді теңдеулерді бір өлшемді модельдерге келтіру; сырықтардың бойлық тербелісіндегі шекті теңдеуі графтың доғаларында екінші ретті дифференциалдық теңдеулермен өрнектеу. Диссертациялық жұмыс нәтижесі Тимошенко, Ляв теорияларының ауқымын кеңейтеді. Шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде, меншікті жиіліктің минимал саны анықталып, қосымша мысал келтірілген. Көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің сындарлы жылдамдығына әсер ететін

шамалар анықталды. Иілген құбырдың ішкі қысымы табылып, меншікті жиіліктерін табу алгоритімі ұсынылды.

### **Диссертациялық жұмыста алынған жаңа нәтижелер:**

1. Жіңішке сырықтың (өзара жалғанысқан жіңішке сырықтар конструкциясының) иілу, көлденең және бұралмалы тербелістерін сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер алынды;

2. Жіңішке сырықтың (өзара жалғанысқан жіңішке сырықтар конструкциясының) еркін шағын тербелісінің меншікті жиілігін анықтау алгоритімі жасалынды.

3. Ақырлы меншікті жиіліктер жиынтығы бойынша жіңішке сырықтың шекаралық бекітілуін конструктивті түрде қалпына келтіру алгоритімі құрылды.

Бірінші баптағы жаңалық - жіңішке сырықтың иілу тербелісі мен көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесінің өзара байланысы көрсетілді. Алынған нәтижелер Тимошенконың белгілі иілу және көлденең тербелісінің теңдеулері кейбір болжамдарда тиімді екенін көрсетті.

Үшінші баптың жаңа аспектісі – шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минимал саны анықталып, қолданыс мысалы келтірілген.

Практикада жиі кездесетін зерттеу нысандары бойынша алынған диссертация нәтижелері теориялық сипатты иеленген. Диссертация нәтижелерінің сенімділігі алынған нәтижелерді белгілі нәтижелермен салыстыру, сондай-ақ шүбәсіз тексерілген математикалық әдістерді қолдану арқылы расталады. Басылымдардың сапасы күмән тудырмайды.

**Тәжірибелік құндылығы** практикада сырық құрылымдары, яғни еркін жалғанған біртекті емес, әлсіз иілген анизотропты сырықтарға маңызыды зерттеу жүргізілген. Жіңішке сырықтар есептерінде басты мақсатқа, шекті теңдеулер жүйесін шекті графта қорытып шығаруға қол жеткізілген.

**Жұмыстың апробациясы** Диссертациялық жұмыстың негізгі тұжырымдары мен нәтижелері келесі ғылыми конференциялар мен семинарларда баяндалып, талқыланған:

ғылыми конференциялар:

1. Сырықтың бойлық тербелісінің меншікті жиіліктері арқылы қима аудандарын қалпына келтіру // Қазақстан Республикасының ғылыми қызметкерлер күніне арналған дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Алматы, Қазақстан, (06.04.2018-10.04.2018), 81-82 б.

2. Сырықтың иілу тербелістерінің жиіліктері арқылы шоғырланған массаларды қалпына келтіру туралы // «XIV-шы студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың ЛОМОНОСОВ – 2018 халықаралық конференциясы», 20.05.2018-21.05.2018 Астана, Қазақстан, 79-79 бет.

3. Ағынды сұйықтығы бар қисық сызықты құбырдың бекітілуінің идентификациясы. // XVII бүкіл ресейлік жастар конференция мектебі

«Лобачевский оқулары – 2018» , Казань, РФ, 23.11.2018-28.11.2018, 90-91 бет.

4.Ағынды сұйықтығы бар құбырдың орнықтылығы//

Халықаралық конференция, Математика, Механика, Қолданбалы мәселелер» Қарағанды, Қазақстан, 12.06.2019-13.06.2019, 32-33 б.

Келесі семинарларда баяндамалар жасалынды:

Әл-фараби атындағы ҚазҰУ механика кафедрасының ғылыми семинарлары (Алматы, Қазақстан 2017-2020).

Ө.А.Джолдасбеков атындағы механика және машинатану институтының ғылыми семинарлары (Алматы, Қазақстан 2017-2020).

**Жарияланымдар.** Диссертация тақырыбы бойынша 10 жұмыс жарияланды, оның ішінде:

1 мақала Scopus Eurasian Mathematical Journal, Q3, CiteScore – 37 – процентиль журналда және 1 Web of Science деректер базасына кіретін ғылыми журналында жарияланған; 3 ғылыми мақала ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдарда; 2 тезис шетелдік конференция материалдарында жарияланған; 3 тезис ҚР-да өткізілген халықаралық конференция материалдарының жинағында жарияланған.

**Автордың жеке қосқан үлесі:**

Жіңішке сырықтың иілу және көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесі өзара байланысын табуға үлес қосты.

Шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды санын анықтауға қатысты.

Жіңішке сырықтар есептерінің шекті теңдеулер жүйесін шекті графта қорытып шығаруға араласты.

**Диссертацияның құрлымы мен көлемі.** Логикалық тұтастықта жазылған диссертация кіріспеден, негізгі үш тараудан, қорытындыдан, қолданылған әдебиеттер тізімінен тұратын, компьютерде терілген 84 беттік мәтінді қамтиды. Кіріспеде зерттелетін мәселенің қазіргі ахуалына шолу жасалып, жұмыстың жалпы сипаттамасы, зерттеу тақырыбының өзектілігі баяндалып, диссертацияда қарастырылатын есептің қойылымы мен мақсаты айқын көрсетілген. Бірінші тарауда жіңішке сырықтар теориясындағы асимптоталық әдістерді басшылыққа ала отырып, жіңішке сырықтың иілу және көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесінің өзара байланысы көрсетілген. Екінші тарау бірнеше сырық бөліктерінен құрылған конструкцияның бойлық тербелісі қарастырылады. Нәтижесінде Лагранж формуласын алу жолдары көрсетіледі.

Үшінші тарауда – шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минимал санын анықтау. Көпір, иілген құбыр сияқты нысандардың жүйелеріндегі ақауларды идентификациялау жолдары қолданыстағы мысалдар арқылы көрсетілген.

# 1 ЖІҢІШКЕ СЫРЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕР

Сырықтар иілуінің техникалық теориясында серпімділік теориясындағы үш өлшемді теңдеулер бір өлшемді модельдерге келтірілген. Бұлай өлшемді төмендету бірқатар физикалық болжамдарға негізделеді [1,2]. Техникалық теориялар инженерлік есептеулерде сәтті қолданылғанымен, бір өлшемді модельдердің нақты нысандарға сәйкестігі туралы мәселе әлі толық зерттелген жоқ. Серпімді сырық теорияларында асимптотикалық талдаудың көптеген әдістері бар. Әдістің тиімді болуы көбінесе зерттеуші таңдаған шешімнің асимптотикалық құрылымына байланысты. Асимптотикалық құрылымды таңдау ғылыми мақалаларда атап өтілген физикалық гипотезалармен бірдей рөл атқарады [3,4,5,6]. Сырықтың диаметрін кішірейту кезінде алынған шешімнің әрекеті туралы нақтырақ дерекке қанығу үшін тереңірек зерттеу жүргізу керек. Сонымен қатар, шамадан тыс шарттар, әдетте, оң жақтан талап етіледі. Өлшемді төмендету жарамды болуы үшін жүйенің оң жағында қандай жағдайлар жеткілікті (қажеттілікке жақын) болар еді деген сауал туындайды. Оң жақтағы ұқсас жағдайларды білу үшін бізге нақты шешім мен асимптотикалық анзаң айырмасының Корн бағалауы қажет. Корнның бағалауы сырықтың диаметрі бойынша да, оң жақ бүйірлерінің дифференциалдық қасиеттері бойынша да ұқсастықтардың дәлелденбейтінін алуға мүмкіндік береді [7,8,9].

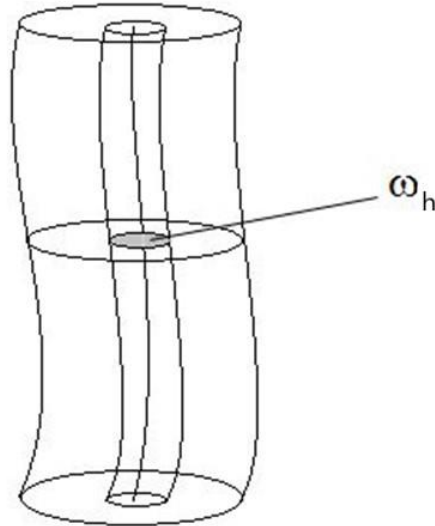
## 1.1 Жіңішке майысқан сырықтың моделі

Алдағы уақытта сырықтың горизонталь қимасының геометриялық сипаттамалары шексіз нөлге ұмтылады (яғни, қима нүктеге қарай жиырылады) деп санаймыз. Бұндай жағдайларды сипаттау үшін  $h$  кіші параметрі енгізілді. Бізге қиманың  $h$  рет сығылуын қарастыру ыңғайлы, яғни

$$\omega_h(z) = \left\{ (y_1, y_2, z) : \left( \frac{y_1 - P_1(z)}{h}, \frac{y_2 - P_2(z)}{h} \right) \in \omega(z) \right\}.$$

Егер  $h \rightarrow +0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(z) = \{(P_1(z), P_2(z), z)\}$ . Осылайша, жіңішке сырық өзінің өсіне ұмтылғандағы шектік жағдайдың моделі пайда болады.





1-сурет.  $h \rightarrow +0$  кезінде сырықтың кішірейюі көрсетілген

## 1.2. Серпімділік теориясының сызықты есебі

Жіңішке майысқан серпімді сырық берілді деп есептейміз. Жылжу векторы

$$u = \begin{pmatrix} u_1(y_1, y_2, z) \\ u_2(y_1, y_2, z) \\ u_3(y_1, y_2, z) \end{pmatrix},$$

болсын. Мұнда,

$u_1$  —  $Oy_1$  өсінің бағытындағы ығысу,

$u_2$  —  $Oy_2$  өсінің бағытындағы ығысу,

$u_3$  —  $Oz$  өсінің бағытындағы ығысу.

Стандартты түрде деформация бағанын және кернеу бағанын енгіземіз.

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{32} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{31} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \sigma(u) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}.$$

Мұндағы  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  дегеніміз -  $y_1, y_2, z$  өстерінің бағытындағы тиісті созылулар. Сол сияқты,  $\varepsilon_{32}$  -  $z$  және  $y_2$  өстерінің бағытындағы ығысу бұрышы. Сонымен қатар,  $\varepsilon_{31}$  мен  $\varepsilon_{12}$  деформациялары да осыған аналог ұғымды береді.

Серпімділіктің математикалық теориясының терминологиясына сәйкес [10]  $y_1, y_2, z$  өстерінің перпендикуляр қимасының нормаль кернеулері  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ . Ал  $\varepsilon_{32}$  -  $y_1$  өсі бағытында  $z = const$  қимасына әрекет етуші жанама кернеу. Сол сияқты  $\sigma_{31}$  және  $\sigma_{12}$  жанама кернеулері аналог ұғым иеленеді. Гук заңынан алатынымыз

$$\sigma(u) = A \varepsilon(u),$$

мұндағы

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

$A$  – материалдың серпімді модульдерінен құралған, симметриялы, оң анықталған,  $6 \times 6$  өлшемді матрица-функция

Мұнда ыңғайлылық үшін  $\sqrt{2}a = 1$  деп алынды.

Алдағы мақсаттар үшін келесі матрицаны енгізу ыңғайлы

$$D(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \alpha \xi_3 & \alpha \xi_2 \\ \alpha \xi_3 & 0 & \alpha \xi_1 \\ \alpha \xi_2 & \alpha \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сонымен қатар градиент

$$\nabla x = \left( \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

мұндағы  $x = (y_1, y_2, z)$ .

Ендеше серпімділік теориясының теңдеулері матрицалық түрде мынадай болады [11,12]

$$L(h, x, \nabla x)u(h, x) := D(-\nabla x)^t A(h, x) D(\nabla x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in S(h), \quad (1.1)$$

$$B(h, x, \nabla x)u(h, x) := D(v(h, x))^t A(h, x) D(\nabla x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \gamma(h), \quad (1.2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \omega_{(h)} \left( \pm \frac{l}{2} \right), \quad (1.3)$$

(1.1) теңдеулерінде,  $s(h)$  сырығына көлемдік күш  $f = (f_1, f_2, f_3)^T$  әсер ететіні ескерілген.  $s(h)$  сырығының  $\gamma(h)$  бүйір бетіне  $g = (g_1, g_2, g_3)^T$  күші түсірілген. Мұнда (1.3) шарты орындалғандықтан,  $s(h)$  сырығының ұштары  $\omega_h\left(\pm \frac{l}{2}\right)$  қатаң бекітілген. Сол сияқты (1.2) қатынасында  $s(h)$  сырығының бүйір бетіне сыртқы бірлік  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$  нормальдары түсірілген.

$$\nu(h, x) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2\nu_0^2}} (\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h\nu_0(\eta, z))^T, \quad (1.4)$$

Мұнда  $\omega(z)$  ке тиісті  $\eta$  баяу айнымалылары енгізіледі. Басқаша айтқанда,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \eta_1 = \frac{y_1}{h}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{h}, \quad (y_1, y_2) \in \omega_h(z),$$

$(\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h\nu_0(\eta, z))$  векторы  $-\partial\omega(z)$  шекарасындағы сыртқы нормалдар.  $\nu_0$  шамасы – қиманың өзгермелілігін сипаттайды.

### 1.3 Жіңішке әлсіз майысқан сырықтың шешімінің асимптотикасы

Алдыңғы бапта сырыққа көлемдік күш  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  пен бүйір бетінен әсер ететін  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$  күштері

$$\int_{\omega(z)} F_i(\eta, z) d\eta + \int_{\partial\omega(z)} g_i(\eta, z) dS_\eta = 0, \quad i = 1, 2.$$

шарттарына бағынатын көлемдік және беттік күштер болсын. Сондай-ақ бізге тек  $z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$  айнымалысына тәуелді  $\vec{T}(z) = (T_1(z), T_2(z), 0)$ , көлемдік күштер қажет болады. Енді (1.1) теңдеуінің оң жағы мынадай түрде болсын делік

$$\vec{f}(h, x) = \frac{1}{h} \cdot \vec{F}(\eta, z) + \vec{T}(z) + \tilde{f}(h, x).$$

Сонда (1.2) қатынасының оң жағы

$$\vec{g}(h, x) = \vec{g}(\eta, z) + \tilde{g}(h, x).$$

Сонымен қатар,  $\vec{F}, \vec{T}, \tilde{f}, \vec{g}, \tilde{g}$  функцияларын ақырсыз дифференциалданады деп есептейміз.  $\vec{F}, \vec{g}$  функцияларының механикалық

кескінделулері [13] монографиясында берілген. Енді  $x \rightarrow (\eta, z)$  координаттарын ауыстыру арқылы  $h$  параметріне айқын тәуелділікті бөліп аламыз.

$$D(\nabla_x) = \frac{1}{h} D_\eta + D_z,$$

мұндағы  $D_\eta = D(\nabla_\eta, 0)$ ,  $\nabla_\eta = \left( \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_2} \right)^T$ ,  $D_z = D(0, 0, \partial_z)$ . Сондықтан,

$$\frac{1}{h^2} D(v) = D_v + h D_0, \quad D_v = D(v_1, v_2, 0), \quad D_0 = D(0, 0, v_0)$$

Алдағы уақытта  $A(h, \eta, z)$  матрицасын  $A(0, \eta, z)$  матрицасына ауыстырамыз да, оны  $A(\eta, z)$  деп белгілейміз. Сонда (1.1) және (1.2) қатынастарына кіретін операторлар мына түрде болады

$$L(h, x, \nabla_x) = \frac{1}{h^2} L^0(\eta, z, \nabla_\eta) + \frac{1}{h} L^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + L^2(\eta, z, \partial_z),$$

$$\sqrt{n(h, x)} \cdot B(h, x, \nabla_x) = \frac{1}{h} B^0(\eta, z, \nabla_\eta) + B^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + h B^2(\eta, z, \partial_z),$$

мұндағы  $L^0 = -D_\eta^T A D_\eta$ ,  $L^1 = -D_\eta^T A D_z - D_z^T A D_\eta$ ,  $L^2 = -D_z^T A D_z$ ,  $B^0 = -D_v^T A D_\eta$ ,

$$B^1 = D_v^T A D_z + D_0^T A D_\eta, \quad B^2 = D_0^T A D_z.$$

Алдағы уақытта  $e_1, e_2, e_3$  арқылы  $y_1, y_2$  және  $z$  өстерінің бірлік векторларын белгілейміз. Ақырында, [14] жұмыстың нәтижелеріне сай асимптотикалық аңдаттың бастапқы мүшелерін мынадай түрде таңдаймыз

$$\frac{1}{h^2} \{e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z)\} + \frac{1}{h} \{e_3 (w_3(z) - \eta_1 \partial_z w_1(z) - \eta_2 \partial_z w_2(z)) + \alpha(\eta, e_1 - \eta_2 e_1) w_4(z)\}$$

мұнда  $w_1, w_2, w_3$  және  $w_4$  - анықталуға тиісті функциялар. Олардың механикалық мағанасы сырықтағы бойлық және көлденең жылжулар мен оның бұралуын білдіреді. Сырықты созу немесе бұраудан гөрі майыстыру оңай болғандықтан,  $w_1, w_2, w_3, w_4$  кезіндегі  $h$  дәрежелерінің көрсеткіштерінің алшақтығы механикалық көрністі береді. Белгілеу енгізелік

$$U^{-2}(z) = e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z),$$

$$U^{-1}(\eta, z) = e_3 (w_3(z) - \eta_1 \partial_z w_1(z) - \eta_2 \partial_z w_2(z)) + \alpha (\eta_1 e_1 - \eta_2 e_1) w_4(z)$$

Енді (1.1), (1.2) және (1.3) есебінің шешімін мына түрде іздейміз

$$u(h, x) = \frac{1}{h^2} U^{-2}(z) + \frac{1}{h} U^{-1}(\eta, z) + U^0(\eta, z) + h U^1(\eta, z) + \dots$$

Сондағы алынатын теңдеулер

$$w(z) \text{ үшін} \quad L^0 U^k = \Phi^k := -L^1 U^{k-1} - L^2 U^{k-2} + \delta_{k,1} \vec{F} + \delta_{k,2} \vec{T}(z) \quad (1.5)$$

$$\partial w(z) \text{ үшін} \quad B^0 U^k = \Psi^k := -B^1 U^{k-1} - B^2 U^{k-2} + \delta_{k,1} \vec{g} \quad (1.6)$$

Мұнда  $k = -2, -1, 0, 2$  және  $p < -2$  кезінде  $U^p \equiv 0$ . Сонымен қатар, бұл жерде, Кронекер символы  $\delta_{ij}$  қолданылып тұр. Егер  $k = -2$  болса, онда (1.5), (1.6) қатынастарының оң жақтары нөлге тең. Демек,  $U^{-2}(z) = e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z)$  өрнегінен келесі теңдіктер шығады

$$w(z) \text{ үшін} \quad L^0 e_1 w_1(z) + L^0 e_2 w_2(z) = 0$$

$$\partial w(z) \text{ үшін} \quad B^0 e_1 w_1(z) + B^0 e_2 w_2(z)$$

Егер  $k = -1$ , онда мынадай жүйе аламыз

$$w(z) \text{ үшін} \quad -D_\eta^T A D_\eta U^{-1} = D_\eta^T A D_z U^{-2}$$

$$\partial w(z) \text{ үшін} \quad D_\nu^T A D_\eta U^{-1} = -D_\nu^T A D_z U^{-2}$$

Қарапайым түрлендірулер арқылы мына формуланың ақиқаттығына көз жеткіземіз:

$$D_z U^{-1}(\eta, z) = Y(\eta) D(\partial z) w(z),$$

мұнда  $w(z) = (w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z))^T$ ,  $D(\partial z) = \text{diag}(\partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z)$ ,

$$Y(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2\eta_2 & \alpha^2\eta_1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Егер  $k=0$ , онда мына жүйе алынады

$$w(z) \text{ үшін } L^0 U^0 = D_\eta^T A D_z U^{-1} + D_z^T A \{D_\eta U^{-1} + D_z U^{-2}\}$$

$$\partial w(z) \text{ үшін } B^0 U^0 = -D_v^T A D_z U^{-1} - v_0 D_1^T A \{D_\eta U^{-1} + D_z U^{-2}\}$$

Енді

$$w(z) \text{ үшін} \quad -D_\eta^T A D_\eta X = D_\eta^T A Y$$

$$\partial w(z) \text{ кезінде} \quad D_v^T A D_\eta X = -D_v^T A Y$$

есебінің шешімі болатын, өлшемі  $3 \times 4$ ,  $X$  матрицасын енгіземіз. Сондағы алатынымыз

$$U^0(\eta, z) = X(\eta, z) D(\partial z) w(z)$$

Енді  $k=1$  кезінде (1.5), (1.6) есебінің шешілуі үшін мына шарттарды қанағаттандыратын  $w$  вектор-функциясын таңдаймыз

$$-\partial_z \int_{w(z)} (D(e_3) e_3)^T A(\eta, z) (D_\eta X(\eta, z) + Y(\eta)) d\eta D(\partial z) w(z) = P_3(z),$$

$$-\partial_z \int_{w(z)} (D(e_3) \theta(\eta))^T A(\eta, z) (D_\eta X(\eta, z) + Y(\eta)) d\eta D(\partial z) w(z) = P_4(z),$$

мұнда  $P_3(z) = \langle \vec{F}(\cdot, z), e_3 \rangle_{w(z)} + \langle \vec{g}(\cdot, z), e_3 \rangle_{\partial w(z)}$ ,

$$P_4(z) = \langle \vec{F}(\cdot, z), \theta \rangle_{w(z)} + \langle \vec{g}(\cdot, z), \theta \rangle_{\partial w(z)}$$

$k \geq 2$  кезінде (1.5), (1.6) есепбінің шешілуі үшін мына шарттарды қанағаттандыратын  $w$  вектор-функциясын таңдаймыз

$$-(e_3)^T \partial_z D_z^T \int_{w(z)} \eta_i A(\eta, z) \{D_\eta X(\eta, z) + Y(\eta)\} d\eta D(\partial_z) w(z) = P_i(z),$$

мұнда  $i=1,2$ ,  $P_i(z) = T_i(z) \text{mes}_2 \{w(z)\} + \partial_z \{ \langle \eta_i, F_3(\eta, z) \rangle_{w(z)} + \langle \eta_i, g_3(\eta, z) \rangle_{\partial w(z)} \}$

Сонымен,  $w(z)$  вектор-функциясы жоғарыда келтірілген төрт шартты қанағаттандыруы қажет. Оларды келесі шектік теңдеулерд жүйесі түрінде жазған қолайлы

$$D(-\partial_z)M(z)D(\partial_z)w(z)=\bar{P}(z), \quad z \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),$$

мұнда  $\bar{P}(z)=(P_1(z), P_2(z), P_3(z), P_4(z))$ ,

$$M(z)=\int_{w(z)} Y^T(\eta)A(\eta, z)(D_\eta X(\eta, z)+Y(\eta))d\eta$$

Бұл кездегі  $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$  интервалының шеттерінде орындалатын шарттар:

$$w_q\left(\pm\frac{l}{2}\right)=0, \quad q=1,2,3,4,$$

$$\partial_z w_i\left(\pm\frac{l}{2}\right)=0, \quad i=1,2.$$

#### 1.4 Шекті теңдеулер жүйесі

Бұл бапта  $h \rightarrow 0$  кезінде (1.1), (1.2), (1.3) қатынастарынан шығатын шекті теңдеулер келтірілген. Осылайша, серпімділік теориясының үш өлшемді есебі бір өлшемді есепке келтірілді.

Бұл кезде изотропты жіңішке майысқан сырық қарастырылады. Ламе коэффициенттері  $\lambda$  және  $\mu$  болсын. Қатаңдық матрицасы мынадай түрде таңдап алынды

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Белгісіз  $w_1(z)$  арқылы  $Oy_1$  өсі бағытындағы ауытқуды белгілейміз. Дәл солай  $w_2(z)$  арқылы  $Oy_2$  өсі бағытындағы ауытқу белгіленеді.  $w_3(z)$  арқылы  $Oz$  өсі бойымен бойлық созылу, ал  $\alpha w_4(z)$  арқылы – осы өстен бұралу бұрышы көрсетіледі. Әрі қарай  $\vec{F}_3(z)$  – бойлық күш, ал  $-\alpha \vec{F}_4(z)$  – сырыққа қойылған айналмалы момент. Онда  $i=1,2$  кезінде кесуші күштер  $\vec{f}_i(z)|\omega(z)|$ , мұндағы  $\omega(z)$  – қима ауданы. Иілу моменті біздің жағдайымызда  $i=1,2$  кезінде:

$$\left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}.$$

Енді  $i=1,2$  кезінде  $\vec{F}_i = \vec{f}_3(z)|\omega(z)| + \frac{d}{dz} \left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}$  деп белгілейміз. Сондай-ақ келесі қажетті шамаларды жазамыз:

$d(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1 d\eta_1 d\eta_2$ ,  $l(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_2 d\eta_1 d\eta_2$ ,  $\alpha(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1^2 d\eta_1 d\eta_2$ ,  $b(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2$ ,  
 $c(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_2^2 d\eta_1 d\eta_2$ ,  $h(z) = \iint_{\omega(z)} (\eta_1^2 + \eta_2^2) d\eta_1 d\eta_2$ . Онда шекті теңдеулер жүйесі былай жазылады:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} \left( \mu(z) \left( \alpha(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + b(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - d(z) \frac{d^2 w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_1(z), \\ \frac{d^2}{dz^2} \left( \mu(z) \left( b(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + c(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_2(z), \\ -\frac{d}{dz} \left( \mu(z) \left( -d(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} + \frac{d w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_3(z), \\ -\frac{d}{dz} \left( \mu(z) \left( \alpha^4 h(z) \frac{d w_4(z)}{dz} \right) \right) = F_4(z), \end{cases} \quad (1.7)$$

және  $\left(-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right)$  интервалының ұштары Дирихле шарттарымен толықтырылады

$$w_q \left( \pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz} w_1 \left( \pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} w_2 \left( \pm \frac{l}{2} \right). \quad (1.8)$$

Жоғарыдағы (1.7) теңдеулердің шектік жүйесінің бұрыннан белгілілерінен айырмашылығы:

- (i)  $O_{y_1}$  өсінің бағыты бойындағы  $w_1(z)$  майысуына  $w_2(z)$ ,  $w_3(z)$  әсер етеді;
- (ii)  $O_{y_2}$  Оөсінің бағыты бойындағы  $w_2(z)$  майысуына  $w_1(z)$ ,  $w_3(z)$  әсер етеді;
- (iii)  $O_z$  Оөсінің бағыты бойындағы  $w_3(z)$  бойлық созылуында  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$  майысуларының ықпалы ескеріледі.

Осы күнге дейінгі белгілі жұмыстарда әдетте қосымша физикалық ұйғарымдар кезіндегі қозғалыстар бөлектенетін еді. Біз (1.7) жүйесінен  $w_1(z)$  мен  $w_2(z)$  иілулері төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандыратынын, ал бойлық созылу  $w_3(z)$  – екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз. Ал  $w_4(z)$  бұралу бұрышын табу үдерісі  $w_1(z)$ ,  $w_3(z)$  және  $w_3(z)$  майысуларына тәуелсіз, яғни ол автономды анықтала алады. Ендеше (1.7) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің коэффициенттері  $O_z$  өсінің бойында  $\omega(z)$  кимасының өзгеруіне тәуелді. Бұл дерек бұрынғы жұмыстарда назардан тыс қалған десек те болады.

### 1.5 Сырықтардың байланысу моделі

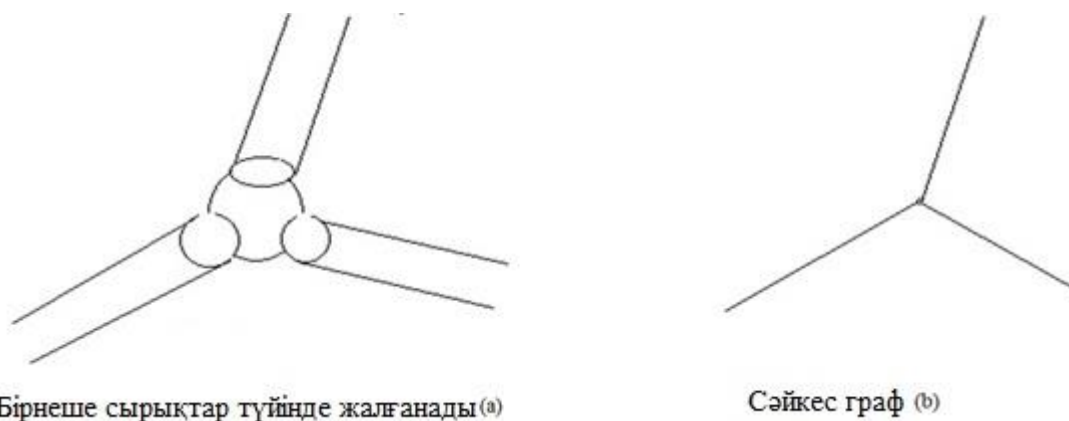
Бұл бапта бірнеше жұқа сырықтардың жалғанысын (бірігуін) қарастырамыз. Ол үшін  $\Omega(h)$  арқылы жұқа  $S_1(h)$ ,  $S_2(h), \dots, S_N(h)$  сырықтары мен  $Q_1(h)$ ,  $Q_2(h), \dots,$



$Q_M(h)$  шағын түйіндерінің бірігуін белгілейміз. Және  $h \rightarrow +0$  кезінде  $\Omega(h)$  облысы конструкция қаңқасы деп аталатын бір-өлшемді  $G$  жиынына тарылады.  $G$  қаңқасы  $V = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$  жиынындағы нүктелер жұбын қосатын  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , түзусызықты кесінділерден құралады. Кейде  $e_1, e_2, \dots, e_n$  доғалары мен  $P_1, P_2, \dots, P_M$  төбелерінен тұратын  $G$ , жиынын геометриялық граф деп атайды. Сырықтың нөмірін білдіретін индестерді қоса отырып, 1-баптағы белгілеулерді сақтаймыз. Мысалы, жаңа белгілеулердегі  $n$ -ші сырық мына түрге келеді

$$S_n(h) = \left\{ x = (y^n, z^n) : z^n \in \left( -\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right), h^{-1}y^n \in \omega^n(z^n) \right\}.$$

Түйін прототипі  $Q_m(h) = \{x \in R^3 : h^{-1}(x - P_m) \in Q_m(1)\}$ . Енді  $Q_m(1)$ ,  $\omega^n$  жиынын  $h$  параметріне тәуелсіз, тағайындалған деп санаймыз.



2-сурет.  $h \rightarrow +0$  кезіндегі  $G$  графына көшу

### 1.6. Серпімділік теориясының теңдеуі

Мәселен,  $\Omega(h)$  – серпімді, біртекті емес, анизотроп дене болсын. Онда  $x = (x_1, x_2, x_3)$  координаттар жүйесіндегі тепе-теңдіктің матрицалық теңдеуі былай жазылады

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in Q(h) \tag{1.9}$$

$L$  операторы (1.1) теңдеуін жазғанда енгізілген. Мұндағы  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$  – жылжу векторы,  $f = (f_1, f_2, f_3)$  – көлемдік күштер. Енді (1.9) қатынасын шеттік шарттармен толықтырамыз. Айталық,  $\partial Q_m(h)$  шекарасының бекітілген бөлігі  $\Gamma(h) = \Gamma_{m_1}(h) \cup \dots \cup \Gamma_{m_j}(h)$  болсын. Бұл кезде,  $j \geq 1$  деп санаймыз. Бекітудің болмауы мүмкін емес. Жылжу векторы  $u$  Дирихле шартын қанағаттандырады

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma(h) \tag{1.10}$$

Қысыла бекітілмеген  $\partial\Omega(h)\Gamma(h)$  бетіндегі  $\Omega(h)$  денесі Нейман шартын береді

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \partial\Omega(h)\overline{\Gamma(h)} \quad (1.11)$$

$B$  операторы 1.2 бабында анықталған.

### 1.7. Сырықтардың жалғануы кезіндегі теңдеулердің шектік жүйесі

Бұл бапта  $h \rightarrow 0$  кезіндегі шектік алмасу жасалады да, нәтижесінде (1.9) жүйесі  $G$  графының доғаларындағы теңдеулеріне, ал (1.10) шекаралық шарттары  $G$  графының шекаралық төбелеріндегі қайбір шекаралық шарттарға көшеді. Сонда, «шектік графтың шекарадан тыс төбелерінде қандай шарттар орындалады?» -деген мейлінше күрделі мәселе туындайды. Әдетте, мұндай шарттар түйіндесу шарты немесе желімдеу шарты деп аталады. Нақтысында желімдеу шарты Кирхгоф шартын білдіреді. Екінші ретгі дифференциалдық теңдеулер үшін бұл біріншіден, шектелмеген әрбір төбедегі үзіліссіздікті білдіреді. Екіншіден, тасқынның сақталуын көрсетеді. Желімдеу шарты туралы деректер [15, 16] жұмыстарында келтірілген. Дегенмен, [17, 18, 19, 20] жұмыстарында атап көрсетілгендей, шектік жағдайда әрқашан Кирхгоф шарты туындай бермейді екен. Түйісу аймағы көлемінің шөгуінің жылдамдығы бағыттаушылардың көлденең қимасының ауданынан төмен болғанда анағұрлым күрделі энергиялық тәуелділіктер немесе жіктелінетін шарттар туындауы мүмкін.

С.А. Назаров пен А.С. Слуцкий [21, 22, 23] жұмыстарында шектік есепте алгебралық белгісіздердің пайда болатындығы және теңдеулердің кейбірінің орта мәні нөлдік функциялардың ішкі кеңістігіне проекцияланатындығы көрсетілген. Мұның сыртында, кейбір түйіндерде желімдеудің локалдік емес шарттары туады.

Сонымен, алдыңғы талқылауларға сай  $G$  шектік графының әрбір  $e_n$  доғасында  $n = 1, \dots, N$  және  $z_n \in \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2}\right)$  кезінде дифференциалдық теңдеулер жүйесі орын алады:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dz_n^2} \left( \mu_n(z_n) \left( \alpha_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + b_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - d_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_1^n(z_n), \\ \frac{d^2}{dz_n^2} \left( \mu_n(z_n) \left( b_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + c_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{d^2 w_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_2^n(z_n), \\ -\frac{d^2}{dz_n^2} \left( \mu_n(z_n) \left( -d_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} + \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_3^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left( \mu_n(z_n) \left( \alpha^4 h_n(z_n) \frac{dw_4^n(z)}{dz_n} \right) \right) = F_4^n(z), \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Сырықтың қатаң бекіту шарты әрекет ететін шеттеріне Дирихле шарттары жазылады.

$$w_q^k(z_k) = 0, q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz_k} w_1^n(z_k) = 0, \quad \frac{d}{dz_k} w_2^n(z_k) = 0 \quad (1.13)$$

мұнда  $z_k$  немесе  $\left(+\frac{l_n}{2}\right)$ , немесе  $\left(-\frac{l_n}{2}\right)$ .

Мұндағы  $k$  шеттері (1.10) қатынасына сай бекітілген сырықтардың нөмірін білдіреді. Енді шекарадан тыс төбелердегі желімдеу шартын жазамыз.  $m = 1, 2, \dots, M$  кезіндегі әрбір  $P_m$  төбесінің орны келесі тоғыз мүшемен сипатталады:

$$(b_1^m, b_2^m, b_3^m, b_4^m, b_5^m, b_6^m) \text{ және } (\beta_1^m, \beta_2^m, \beta_3^m) \quad (1.14)$$

Дербес жағдайда,  $b_3^m$  және  $\beta_3^m$  шамаларын сырықтың  $z_m$  өсі бағытындағы түйіннің жылжуы дейміз;  $w_1^n, w_2^n$  майысуларынан,  $w_3^n$  бойлық созылуы мен  $w_4^n$  бұралу бұрышынан басқаларын да  $z^n$  өсі бағытындағы тұрақты  $\alpha_3^n$  жылжуларымен сипатталады.

Қайбір  $S(h)$  сырығы  $Q_m(h)$  түйінімен жалғанса, онда келесі жалғаныс түрлеріне рұқсат етіледі:

- қатаң бекіту;
- болымсыз қозғалысты түйін;
- тағайындалған бір бағытта жылжымалы түйін;
- тағайындалған бір бағытта жылжымайтын түйін;
- жылжымалы түйін.

Жалғаныстың төбедегі бекіту категориясына байланысты (1.14) жиынтықтары мен (1.15) арасында қайбір белгілі алгебралық қатынастар орындалады:

$$w_1^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_2^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_3^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_4^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), \frac{d}{dz_n} w_1^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), \frac{d}{dz_n} w_2^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), \alpha_3^n, \alpha_3^n \quad (1.15).$$

$Q_m(h)$  түйінінде бірнеше  $S(h), n \in B(m) \subset \{1, 2, \dots, N\}$  сырықтары кездескенде де  $n \in B(m)$  кезінде (1.14) пен (1.15) жиынтықтарының арасында алгебралық қатынастар туындайды. Мәтінді басы артық дүниелермен көлегейлемес үшін, олардың мөлшері мен тиісті алгебралық қатынастары (1.12), (1.13) өрнектері шешімге ие болатындай етіп таңдалғанын айта кетелік.

Бұл баптың қорытындысында бекітудің түрлі категориялары туындағандағы сырықтар жалғаныстарының мысалдарын келтіреміз. Сонымен қатар, мұндай конструкциялардың еркін тербелістерінің меншікті жиіліктерін есептейміз.

## 2 БІРНЕШЕ СЫРЫҚ БӨЛІКТЕРІНЕН ҚҰРАЛҒАН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ БОЙЛЫҚ ТЕРБЕЛІСІ

Алдыңғы тарауда бірнеше сырықтың жалғанысынан тұратын конструкция  $h \rightarrow 0$  кезінде шектік графқа көшетінін көрсеткенбіз. Бұл кезде серпімділік теориясының тиісті дифференциалдық теңдеулері графтағы бір-өлшемді дифференциалдық теңдеуге айналады. Сонда, жалғанысқан сырықтардың түйініне сай граф төбелерінде Кирхгоф шарты делінетін шарт туындайды екен. Сырықтың қапталына сәйкес төбелерінде шекаралық шарттар делінетін шарттар пайда болады. Сырықтардың қапталдары түрлі бекіту иемденеді. Бұл тараудағы бойлық тербелістердің меншікті мәндері (жиіліктері) нақты сан болуы үшін графтағы шарттарды қалай таңдап алу қажеттігі туралы мәселе зерттеледі. Өйткені серпімді сырықтар теориясында тек қана нақты (оң) меншікті мәндер қолданылады.

Екінші тарауда сырықтардың тек қана бойлық тербелістері қарастырылғандықтан, шектік граф доғаларында екінші ретті дифференциалдық теңдеулер берілген. Бұл (1.14) жүйесіндегі үшінші теңдеуде мына шамалардың  $d_n(z_n) = 0$ ,  $l_n(z_n) = 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  жағдайларына сай келеді.

### 2.1. Дифференциалдық операторлардың Лагранж формуласы және бұтадағы максимумдық оператордың өзіне түйіндес тарылуы

Екінші тарау бұтада анықталған сызықтық дифференциалдық операторларға арналған. Бұл тараудың мақсаты - бұтадағы берілген максимумдық дифференциалдық операторының қисынды шектеулерін алу болғандықтан - мұнда максимумдық оператордың барлық өзіне түйіндес шектеулері, сонымен қатар, максимумдық операторының бүкіл қайтарымды шектеулері сипатталған. Мұның сыртында, бұл тарауда ішкі төбелерінде Кирхгоф шарты бар бұтадағы дифференциалдық оператордың Лагранж формуласы көрсетілген.

Мәселен, граф-бұтасы  $\mathcal{Z} = \{\nu, \varepsilon\}$  берілсін, мұндағы  $\nu$  -  $\mathcal{Z}$  графындағы төбелер жиыны және  $\varepsilon$  — оның доғаларының жиыны болсын. Егер графтың бір төбесінен басқа барлық төбелерінде бір кіріс доғасы болса, онда бағдарланған граф бұта деп саналады. Кіріс доғасы жоқ төбе бұтаның түбірі деп аталады да, оған нөл нөмірі телінеді. Бұтаның маңызды қасиеті - түбірден кез-келген төбеге дейін оларды қосатын жалғыз маршрут болады [33]. Маршрут ұзындығы граф төбесінің биіктігін анықтайды. Шығатын доғалары жоқ төбелерді шекаралық төбелер дейміз де,  $\Gamma$  арқылы белгілейміз. Шекарадан тыс төбелер ішкі төбелер делініп,  $\mathcal{Z}$  арқылы белгіленеді. Әуелі, от 0 ден  $P$  ға дейін шекаралық төбелерді нөмірлейміз. Одан соң  $p+1$  ден  $r$  ге дейінгі нөмірді «биіктігі жоғары болса, жоғары нөмірге ие болады»- деген қағида бойынша ішкі төбелерге үлестіреміз.  $m_j$  арқылы  $j$  төбесінен шығатын доғалардың мөлшерін белгілейміз.

Жалпылыққа нұқсан келтірмей, әрбір доғаның ұзындығы бірге тең деп

санаймыз.  $j$  төбесінде аяқталатын доғаны  $e_j$  арқылы белгілейміз.  $e_j$  доғасында анықталған  $y(x)$  функциясын  $y_j(x_j)$ ,  $x_j \in e_j$  арқылы белгілейміз. Түбірден шығып,  $j$  төбесінде аяқталатын маршрутты  $s_j$  арқылы, ал оның ұзындығын  $|s_j| - 1$  арқылы белгілейміз. Бұдан әрі барлық жерде түбірден жалғыз доға шығады деп санаймыз.

## 2.2 Бұтадағы максимал операторды анықтау

Мына кеңістікті қарастыралық

$$L_2(\mathfrak{S}) = \prod_{j=1}^r L_2(e_j),$$

оның элементтері

$$\vec{Y}(\vec{X}) = [y_j(x_j), j = 1, \dots, r]^T$$

(мұнда  $\vec{X} = (x_j, j = 1, \dots, r)$  және  $\prod_{j=1}^r$  кеңістіктердің декарттық көбейтіндісі)

және ақырлы нормасы

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(\mathfrak{S})} = \sqrt{\sum_{j=1}^r \int_{e_j} |y_j(x_j)|^2 dx_j}$$

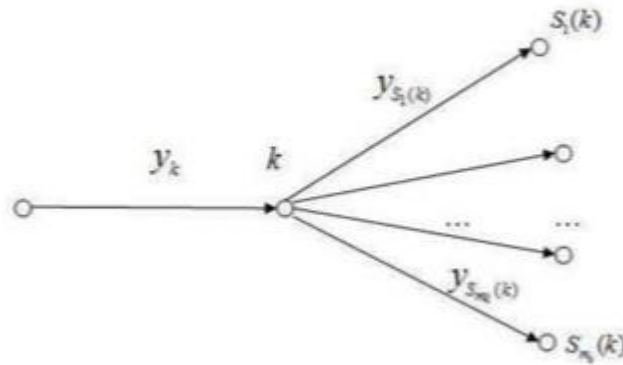
Дәл осылай стандарттық түрде функциялардың  $D\Lambda(\max) \subset W_2^2(\mathfrak{S})$  жиынының элементтері

$$y_k(1) = y_{s_1(k)}(0) = \dots = y_{s_{mk}(k)}(0) \quad (2.1)$$

$$y'_k(1) = y'_{s_1(k)}(0) = \dots = y'_{s_{m_k(k)}}(0) \quad (2.2)$$

Кирхгоф шартын қанағаттандыратын  $W_2^2(\mathfrak{S}) = \prod_{j=1}^r W_2^2(e_j)$  кеңістігі енгізіледі.

Әрбір ішкі төбеде  $k = p+1, \dots, r$ . Мұндағы  $s_1(k), \dots, s_{m_k}(k)$  дегеніміз-  $k$  төбесінен шығатын қабырғалар саны



3-сурет. Шешімнің ішкі  $k$ -шы төбедегі үлестірімі.

Анықталу облысы  $D\Lambda(\max)$

$$-y''_j(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = p^2 y_j(x_j), \quad e_j \in \mathcal{E}, \quad 0 < x_j < 1, \quad (2.3)$$

сызықты дифференциалдық өрнектерімен берілетін  $\Lambda_{\max}$  операторын максимал оператор дейміз.

Мұндағы  $\{q_j(x_j), x_j \in e_j \in \mathcal{E}, 0 < x_j < 1\}$  әдетте потенциал деп аталатын, үзіліссіз нақты функциялар жиынтығы. Сонда ішкі төбелердегі Кирхгоф шарттарының жалпы мөлшері  $2r - p - 1$  санына тең.

### 2.3. Бұтада анықталған дифференциалдық оператордың Лагранж функциясы

Дифференциалдық операторларды кесіндіде зерттегенде, Лагранж формуласы маңызды рөл атқарады. Бұл бапта графтағы дифференциалдық оператор кезіндегі Лагранж формуласының аналогы келтірілген.

Лемма 2.1. Келесі теңбе-теңдік

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= \sum_{k=1}^r [-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)}] + \\ &+ \sum_{k=p+1}^r [y'_k(0) \overline{v_k(0)} + y_k(0) \overline{v'_k(0)}] + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кез-келген  $\bar{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1, \dots, r\}, \bar{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1, \dots, r\}$  из  $W_2^2(\mathfrak{Z})$  функциясы үшін орындалады, мұндағы  $\bar{z}$  -  $z$  саның комплекс түйіндесі.

Дәлелі. (2.1) өрнегінің сол жағындағы  $\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j$  интегралын қарастырамыз. Интегралды  $e_j$  қабырғасы бойында былай жазамыз:

$$\int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j = \int_0^1 (-y''(x_j) + q_j(x_j)y(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j$$

$\int_0^1 (-y''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j$  өрнегін екі рет бөліктеп интегралдау арқылы алатынымыз

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-y''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= [-y'_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} + y_j(x_j) \overline{v'_j(x_j)}]_{x_j=0}^{x_j=1} + \\ &+ \int_0^1 y_j(x_j) \overline{(-v''_j(x_j))} dx_j \end{aligned}$$

Барлық  $e_1, \dots, e_r$  қабырғаларының біреуінен басқасы  $x=1$  де аяқталып, тек қана біреуі  $x=0$  нүктесінде аяқталатындығын ескерсек, (2.2) теңдігінен (2.1) леммасының тұжырымы шығады.

Лемма 2.2 Мына теңбе-теңдік

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= \sum_{k=1}^p [-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)}] + [y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0) \overline{v'_{p+1}(0)}] + \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (2.5)$$



$\Lambda_{\max}$  максималды операторының анықталу облысындағы кез-келген  $\bar{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1, \dots, r\}, \bar{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1, \dots, r\}$  функциясы үшін орындалады.

Дәлелі. Біз  $j$  индексі  $p+1, \dots, r$  мәндерінің бірін қабылдайды деп есептесек, онда  $J$ -ші төбенің мүшелердегі үлесі

$$\sum_{k=1}^p [-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}] + \sum_{k=p+1}^r [y'_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0)\overline{v'_{p+1}(0)}] \quad (2.6)$$

Интегралды қамтымайтындарын мына түрде жаза аламыз

$$[-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}] + \sum_{k=p+1}^r [y'_{s_k(j)}(0)\overline{v_{s_k(j)}(0)} - y_{s_k(j)}(0)\overline{v'_{s_k(j)}(0)}] \quad (2.7)$$

Онда (2.1) шарты бойынша (2.7) қосындысын есептесек:

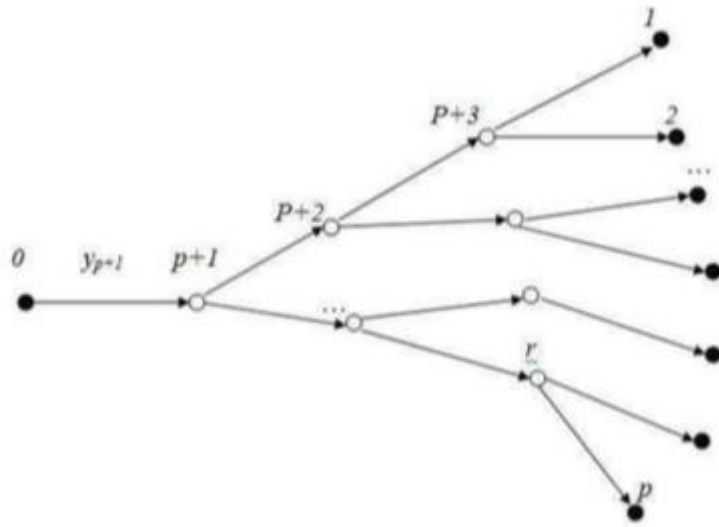
$$[-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}] + \overline{v_j(1)} \sum_{k=1}^{m_j} y'_{s_k(j)}(0) - y_j(1) \sum_{k=1}^{m_j} \overline{v'_{s_k(j)}(0)}$$

Бұдан әрі (2.2) Кирхгоф шарты бойынша соңғы өрнекті есептейміз, сондағы алатынымыз

$$[-y'_j(1)\overline{v_j(1)} + y_j(1)\overline{v'_j(1)}] + \overline{v_j(1)} y'_j(1) - y_j(1) \overline{v'_j(1)} = 0. \quad (2.8)$$

(2.8) өрнегі  $p+1, \dots, r$  ішкі төбелерінің (2.6) интеграл қамтымайтын мүшелердегі үлесі нөлге тең ендігін көрсетеді. Сондықтан, (2.6) өрнегінде тек қана шекаралық  $0, \dots, p$  төбелердің ықпалын ескеру қажет. Ендеше бізде  $y_j(x), y'_j(x), \overline{v_j(x)}, \overline{v'_j(x)}, j = 1, \dots, p$  функциясының  $x=1$  мәні бар. Бұл функциялардың шекаралық  $1, \dots, p$  төбелердегі  $e_1, \dots, e_p$  кіріс қабырғаларында анықталғандығын еске түсірелік. Сол сияқты  $y_{p+1}(x), y'_{p+1}(x), \overline{v_{p+1}(x)}, \overline{v'_{p+1}(x)}$  функциясының  $x=0$  нүктесіндегі мәні нөлге тең. Бұл функциялар  $0$  төбесінен шығатын және  $p+1$  төбесіне бағытталған  $e_{p+1}$  шығыс қабырғаларында анықталған (4-сурет)

$$\sum_{k=1}^p [-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}] - [-y'_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0)\overline{v'_{p+1}(0)}]$$



4-сурет.  $r$  төбелі бұта (қара төбелер - шекаралық).

Лемма дәлелденді.

Демек, (2.2) леммасы ішкі төбелердің (2.5) интегралын қамтымайтын мүшелердегі үлесі нөлге тең екендіні көрсетеді. Басқаша айтқанда, (2.5) интегралынан тыс мүшелер тек қана шекаралық төбелердің үлесін қамтиды. Мұндай формулаларды [28] монографиясындағыдай Лагранж формулалары деп атаймыз. Аталған (2.3) формуласын келесі бағытта жалпылауға болады.

Ендеше  $k = 1, \dots, 2(p+1)$  үшін төмендегідей шекаралық формаларды қарастыралық

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [\alpha_{kj} y_j(1) + \beta_{kj} y'_j(1)] + [\alpha_{k,p+1} y_{p+1}(0) + \beta_{k,p+1} y'_{p+1}(0)]. \quad (2.9)$$

Мұндағы  $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \alpha_{k,p+1}, \beta_{k,p+1}$  қайбір константалар.

Теорема 2.1. [Лагранж формуласы], Мәселен,  $\{U_1, \dots, U_{2(p+1)}\}$  тәуелсіз шекаралық формалар жинағы болсын делік. Онда  $\{T_1, \dots, T_{2x}\}$  шекаралық формаларының төмендегі шарттарды қанағаттандыратын жалғыз жиынтығы табылады:  $\Lambda_{\max}$  операторының анықталу облысындағы кез-келген  $\bar{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1, \dots, r\}, \bar{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1, \dots, r\}$  функциясы үшін мына тепе-теңдік орындалады:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= U_1(\vec{Y}) \overline{I_{2(p+1)}(\vec{V})} + U_2(\vec{Y}) \overline{I_{2(p+1)-1}(\vec{V})} + \dots + \\ &+ U_{2(p+1)}(\vec{Y}) \overline{I_1(\vec{V})} + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (2.10)$$

Дәлелі. Мына айырманы енгізелік:

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j - \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j .$$

Онда 2.2 леммасы бойынша бұл айырманы былай жаза аламыз

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^p \left[ -y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)} \right] + \left[ y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(1)} + y_{p+1}(1) \overline{v'_{p+1}(1)} \right] \quad (2.11)$$

Ендеше, айырма  $\{y_j(1), y'_j(1), j=1, \dots, p\}$ ,  $\{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$  шекаралық мәндерінің  $2(p+1)$  жиынтығы арқылы өрнектеледі екен. Көрсетілген жиынтық  $2(p+1)$  сызықтық тәуелсіз жүйені білдіреді. Сондықтан, шекаралық мәндер жиынтығын теореманың шартын қанағаттандыратын қайбір  $\{U_1, \dots, U_{2(p+1)}\}$  шекаралық формаларының сызықты комбинациясы ретінде өрнектей аламыз. Ол үшін (2.9) қатынасын  $\{y_j(1), y'_j(1), j=1, \dots, p\}$ ,  $\{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$  шамаларына қатысты алгебралық жүйе ретінде қарастыру қажет. Енді (2.9) жүйесін  $\{y_j(1), y'_j(1), j=1, \dots, p\}$ ,  $\{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$  шамаларына қатысты шешіп, алатынымыз

$$y_j(1) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j=1, \dots, p, \quad (2.12)$$

$$y'_j(1) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \sigma_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j=1, \dots, p,$$

$$y_{p+1}(0) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{k,p+1} U_k(\vec{Y}),$$

$$y'_{p+1}(0) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} \sigma_{k,p+1} U_k(\vec{Y})$$

Алынған өрнекті (2.11) айырымына қойсақ:

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^p \left[ - \left( \sum_{j=1}^{2(p+1)} \sigma_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_j(1)} + \left( \sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v'_j(1)} \right] + \\ + \left[ \left( \sum_{j=1}^{2(p+1)} \sigma_{j,p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_{p+1}(0)} - \left( \sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{j,p+1} U_{p+1}(\vec{Y}) \right) \overline{v'_{p+1}(0)} \right]$$

Енді соңғы теңдіктің оң жағын  $\{U_k(\vec{Y})\}$  шамасына қатысты топтастырғанда алатынымыз:

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_j(\vec{Y}) \left\{ \sum_{k=1}^p [-\sigma_{jk} \overline{v_j(1)} + \gamma_{jk} \overline{v'_j(1)}] + [\sigma_{j,p+1} \overline{v_{p+1}(0)} + \gamma_{j,p+1} \overline{v'_{p+1}(0)}] \right\}$$

Егер соңғы өрнектегі шаршы жақшадағы қосындыны белгілесек:

$$T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V}) = [-\bar{\sigma}_{jk} v_j(1) + \bar{\gamma}_{jk} v'_j(1)] + [\bar{\sigma}_{j,p+1} v_{p+1}(1) \bar{\gamma}_{j,p+1} v'_{p+1}(1)],$$

онда, талап етілген формуланы аламыз

$$\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_k(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V})} + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \Lambda_{\max} v_j(x_j) dx_j$$

Жоғарыдағы (2.10) формулдасы Лагранж формуласы деп аталады.

Бұл 2.1 теоремасынан келесі салдар шығады.

Салдар 2.1. Мәселен,  $\Lambda_{\max}$  операторының  $D(\Lambda) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_1(\vec{Y}) = 0, \dots, U_{p+1}(\vec{Y}) = 0\}$  анықталу облысындағы тарылуы  $\Lambda$  болсын делік. Сонда  $\Lambda^*$  түйіндес операторы  $D(\Lambda^*) = \{\vec{V} \in D(\Lambda_{\max}) : T_1(\vec{V}) = 0, \dots, T_{p+1}(\vec{V}) = 0\}$  анықталу облысындағы  $\Lambda_{\max}$  тарылуы да болады және кез-келген  $\vec{Y} \in D(\Lambda)$  мен  $\vec{V} \in D(\Lambda^*)$  үшін төмендегі теңдік ақиқат:

$$\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda^* v_j(x_j)} dx_j$$

## 2.4 $\Lambda_{\max}$ операторының өзіне түйіндес тарылуы

$\Lambda_{\max}$  операторының барлық өзіне түйіндес тарылуларының торлық сипаттамасын береміз. Әуелі  $\Lambda_{\max}$  операторының  $\Lambda_0$  минимум тарылуын енгіземіз.  $D(\Lambda_0)$  арқылы

$$j = 1, \dots, p \text{ кезінде } y_j(1) = 0, y'_j(1) = 0 \quad (2.13)$$

$$y_{p+1}(0) = 0, y'_{p+1}(0) = 0$$

шарттарын қанағаттандыратын барлық  $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{\max})$  функцияларының жиынтығын белгілейміз.

Бұдан әрі келесі формула бойынша  $\Lambda_0$  минимум тарылуын енгіземіз:

$$\Lambda_0 \vec{Y} = \Lambda_{\max} \vec{Y}, \vec{Y} \in D(\Lambda_0).$$

Келесі тұжырымдар ақиқат:

- 1) кез-келген  $\vec{Y} \in D(\Lambda_0), \vec{V} \in D(\Lambda_{\max})$  элементтер үшін мына қатынас орындалады

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_{\max} \vec{V} \rangle \quad (2.14)$$

- 2) кез-келген  $\vec{Y} \in D(\Lambda_0), \vec{V} \in D(\Lambda_{\max})$  элементтері үшін мына теңдік ақиқат

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_0 \vec{V} \rangle$$

Жоғарыдағы (2.14) қатынасынан  $\Lambda_{\max} \subset \Lambda_0^*$  операторлық енгізілуі шығады.

Минимум операторының қасиетін зерттеу үшін  $\Lambda_{\max}$  операторының тарылуы болып табылатын  $\Lambda_1$  және  $\Lambda_2$  операторларын енгізген қолайлы.

$$D(\Lambda_1) = \{ \vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p, y_{p+1}(0) = 0 \} \text{ және } \vec{Y} \in D(\Lambda_1) \text{ кезінде}$$

$$\Lambda_1 \vec{Y} = \Lambda_{\max} \vec{Y}$$

мәселен

$$D(\Lambda_2) = \{ \vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y'_j(1) = 0, j = 1, \dots, p, y'_{p+1}(0) = 0 \}$$

$$\vec{Y} \in D(\Lambda_2) \text{ кезінде } \Lambda_2 \vec{Y} = \Lambda_{\max} \vec{Y} \text{ болсын.}$$

Ұйғарым 2.1.  $L_2(\mathfrak{Z})$  дағы кез-келген  $\vec{F}(x)$  функциясы үшін

$$\Lambda_i \vec{Y}(x) = \vec{F}(x), \quad i=1,2 \quad (2.15)$$

теңдеуі  $D(\Lambda_i)$ ,  $i=1,2$  жиынында жалғыз шешімге ие болады.

Ескерту 2.1.  $D(\Lambda_i)$ ,  $i=1,2$  жиынындағы (2.15) операторлық теңдеуі  $\varepsilon$  қабырғалар жиынында ішкі  $I$  төбелерінде Кирхгоф  $2|\varepsilon| - p - 1$  шартын иеленетін және  $\Gamma$  төбелеріндегі шекаралық шарттарында  $p+1$  шарты бар екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесіне эквивалент. Ендеше  $\varepsilon$  қабырғалар жиынында жалпы шешімі  $2|\varepsilon|$  константаларды қамтитын біртекті емес сызықтық екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі туындайды. Оларды анықтайтын  $(2|\varepsilon| - p - 1) + 1 = 2|\varepsilon|$  сызықтық шарттары бар. Демек, өлшемі  $2|\varepsilon|$  қайбір  $D_i, i=1,2$  анықтауышын жаза аламыз. Сонда, (2.15) теңдеуінің бірімәнді шешілетіндігі  $D_i, i=1,2$   $2|\varepsilon|$  анықтауышының нөлден ерекше екендігіне эквиваленттігін көреміз. Ендеше теңдеудің бірімәнді шешілетіндігі жазылған анықтауыштың нөлден ерекше екендігін білдіреді.

М.А.Неймарк монографиясына [29] сүйеніп, келесі екі лемманы қарастырамыз:

Лемма 2.3. Айталық  $\Lambda_{\max}$  3 бапта енгізілген  $\mathfrak{Z}$  жиынындағы максимал оператор және  $\vec{F}(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$  дағы функция болсын. Егер 2.1-ұйғарым орындалса, онда

$$\Lambda_{\max} \vec{Y}(x) = \vec{F}(x),$$

(2.13) шарттарын қанағаттандыратын  $\vec{F}(x)$  шешіміне тек қана  $\text{Ker} \Lambda_{\max}$  жиынындағы барлық элемент ортогонал болғанда ғана жетеді.

Дәлелі. 2.1-ұйғарым бойынша,  $i = 1$  кезіндегі (2.15) операторының жалғыз шешімін  $\vec{Y}(x)$  арқылы белгілейміз. Бұдан соң,  $\Lambda_{\max} \vec{V} = 0$  біртекті операторлық теңдеуінің  $v_{p+1,l}(0)$  кезіндегі барлық шекаралық формаларының біреуінен басқасы нөлге тең, ал формалардың бірі бірге тең болатын іргелі шешімдерін  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$  арқылы белгілейміз. Мұндай іргелі жүйе бар. Ол 2.1-ескертуден шығады, өйткені шешімділік шарты  $D_1$  анықтауышының нөлден ерекше екеніне эквивалент.

$\vec{Y}(x)$  және  $\vec{V}_k(x)$  функцияларына Лагранж формуласын қолданып, алатынымыз

$$\langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle = \langle \Lambda_{\max} \vec{Y}, \vec{V}_k \rangle - \langle \vec{Y}, \Lambda_{\max} \vec{V}_k \rangle \quad (2.16)$$

Бірақ  $\Lambda_{\max} \vec{V}_k = 0$ . Мұның сыртында, тиістіліктен шығатыны

$$\sum_{l=1}^p y_l(1)v'_{kl}(1) - y_{p+1}(0)v'_{k,p+1}(0) = 0.$$

Демек, (2.16) формуласы

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle &= -\sum_{l=1}^p y'_l(1)v_{kl}(1) + y'_{p+1}(0)v_{k,p+1}(0) = 0 \\ &= \begin{cases} -y'_l(1) & \text{if } v_{kl}(1)=1, \\ y'_{p+1}(0) & \text{if } v_{k,p+1}(0)=1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Осы (2.17) қатынасынан 2.3 леммасының тұжырымы шығады: (2.17) теңдігі тек қана  $\langle \vec{F}, V'_k \rangle = 0$ ,  $k=1, \dots, \chi$  болғанда ғана орындалады. Сонымен,  $\vec{F}(x)$  барлық  $\Lambda_{\max} V = 0$  шамасына ортогонал.

Лемма 2.4.  $\partial + e \in \Gamma$  кезінде  $\alpha_e \beta_e$  және при  $\partial + e \in \Gamma$  кезінде  $\alpha_e \beta_e$  сандары қандай болса да, 1-ұйғарым орындалған кезде келесі шарттарды қанағаттандыратын  $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{\max})$  функциясы табылады:

кез-келген  $\alpha_k, \beta_k$  сандары үшін  $k=1, \dots, p$  және  $\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}$  кезінде

$$y'_k(1) = \beta_k, y_k(1) = \alpha_k, k=1, \dots, p,$$

$$y'_{p+1}(0) = \beta_{p+1}, y_{p+1}(0) = \alpha_{p+1}$$

Дәлелі . Барлық  $\alpha_e = 0$  болғандағы жағдай үшін 2.4-лемманы дәлелдейік.  $\vec{F}(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$  функциясын мына түрде таңдаймыз

$$\langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle = \begin{cases} -\beta_l & \text{if } v_{kl}(1)=1, \\ \beta_{p+1} & \text{if } v_{k,p+1}(0)=1, \end{cases} \quad (2.18)$$

Мұндағы 2.3-леммасын дәлелдегендегі іргелі жүйе. Мұндай элемент тіпті  $\text{Ker}\Lambda_{\max}$ . Шынында да, егер

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^{p+1} \mu_k \bar{V}_k,$$

десек, онда (2.18) шарты Грам анықтауышы сызықты тәуелсіз  $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_{p+1}$  функцияларының анықтауышы болатын  $\mu_1, \dots, \mu_{p+1}$  тұрақтыларына қатысты теңдеулер жүйесі болады. Демек, ол нөлден ерекше.  $\Lambda_1 \bar{V} = \bar{F}$  теңдеуінің шешімін  $\bar{V}$  арқылы белгілейміз. Сонда Лагранж формуласынан алатынымыз

$$j = 1, \dots, p \text{ кезінде } \bar{V}'(1) = \beta_j, \bar{V}'(0) = \beta_{p+1}.$$

Сонымен, құрастырылған  $\bar{V}(x) \in D(\Lambda_{\max})$  функциясы мынадай болады:

$$j = 1, \dots, p \text{ кезінде } \bar{V}'(1) = \beta_j, \bar{V}'(1) = 0,$$

$$\bar{V}'(0) = \beta_{p+1}, \bar{V}'(0) = 0.$$

$\alpha_e$  және  $\beta_e$  жинақтарының және  $\Lambda_1$  мен  $\Lambda_2$  операторларының рөлдерін алмастырсақ, 2.4-леммасының толық дәлелін аламыз..

Енді минимум  $\Lambda_0$  операторына қатысты тұжырымды қисындай аламыз..

Лемма 2.5.  $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* = \Lambda_{\max}$ ,  $\Lambda_{\max}^* = \Lambda_0$ .

2.5-леммасы [28] монографиясында §17 дегі  $V$  дәлелдеуіндегі дәлелденеді.

Негізгі теорема.

Теорема 2.2 2.1-тұжырым орындалғанда  $\Lambda_0$  операторының  $\Lambda$  өзіне түйіндес кеңейуі  $k = 1, \dots, p+1$  түріндегі сызықтық тәуелсіз шеттік шарттар арқылы анықталады.

$$U_k(\bar{Y}) = \sum_{j=1}^p [\alpha_{jk} y_j(1) + \beta_{jk} y'_j(1)] + [\alpha_{p+1,k} y_{p+1}(0) + \beta_{p+1,k} y'_{p+1}(0)] = 0 \quad (2.19)$$

мұндағы  $\alpha_{jk}, \beta_{jk}$  — қайбір константалар, әрі



$j, k = 1, \dots, p$  кезінде

$$\sum_{j=1}^p [\alpha_{jk} \bar{\beta}_{jk} - \bar{\alpha}_{jk} \beta_{jk}] = \alpha_{p+1,k} \bar{\beta}_{p+1,k} - \bar{\alpha}_{p+1,k} \beta_{p+1,k} \quad (2.20)$$

Керісінше, егер 2.1-ұйғарым орындалса, онда (2.20) қатынастарын қанағаттандыратын, (2.19) түріндегі кез-келген сызықтық тәуелсіз шекаралық шарттар  $\Lambda_0$  операторының қайбір өзіне түйіндес кеңейудің анықталу облысын көрсетеді.

Дәлелі. [28] монографиясының §18 дегі 2.2-теореманың дәлелдеуіне қарай  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$  функцияларын енгіземіз. Дәлірек айтқанда,  $D(\Lambda_{max})$  анықталу облысындағы  $\vec{V}_k$  мына шарттармен жазылады

$$j = 1, \dots, p \text{ кезінде } v'_{kj}(1) = \alpha_{jk}, v_{kj}(1) = -\beta_{jk}, \quad (2.21)$$

$$v'_{k,p+1}(0) = -\alpha_{p+1,k}, v_{k,p+1}(0) = \beta_{p+1,k}.$$

2.4-леммасы бойынша мұндай шешімдер табылады. Онда  $k = 1, \dots, p + 1$  кезіндегі (2.19) шарты

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [y_j(1)v'_{kj}(1) - y'_j(1)v_{kj}(1)] - [y_{p+1}(0)v'_{k,p+1}(0) - y'_{p+1}(0)v_{k,p+1}(0)] = 0.$$

[5] монографиясының нәтижелеріне сай (2.19) шеттік шарты  $\Lambda_0$  операторының өзіне түйіндес  $\Lambda$  кеңейуінің анықталу облысына анықтайды. (2.21) қатынасына сай анықталған барлық  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$  функцияларда ғана, келесі шарттар орындалады

$$U_k(\vec{V}_j) = 0, \quad k, j = 1, \dots, p + 1$$

2.2-теоремасы толық дәлелденді.

## 2.5 $\Lambda_{\max}$ оператордың қисынды тарылуы

Алдыңғы бөлімде  $\Lambda_{\max}$  операторының барлық өз-өзіне түйіндес тарылуларын сипаттадық.  $\Lambda_{\max}$  операторының қисынды тарылуларын сипаттайық.  $\Lambda$  операторы  $\Lambda_{\max}$  оператордың қисынды тарылуы деп аталады, егер келесі шарттар орындалатын болса

- (i)  $\Lambda \subset \Lambda_{\max}$ ,
- (ii)  $\exists \Lambda^{-1} L_2(\mathfrak{Z})$ -де шектелген оператор болып табылады

Дифференциалдық операторлардың әртүрлі кластарының қисынды тарылуы [27, 30] жұмыстарында зерттелген. [27, 30] жұмыстары бойынша, біріншіден,  $\Lambda_{\max}$  оператордың барлық қисынды шектеулерінен  $\Lambda_1$  қандай да бір қисынды тарылуын таңдап алу қажет. Содан кейін,  $\Lambda_1^{-1}$  кері операторын біле отырып барлық қисынды тарылуларын сипаттау қажет.

## 2.6 Белгіленген қисынды тарылу үшін Грин функциясы

$\Lambda_{\max}$  операторының қисынды тарылуы ретінде анықталу облысы

$$D(\Lambda_1) = \{\bar{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p, y_{p+1}(0) = 0\}$$

болатын  $\Lambda_1 \subset \Lambda_{\max}$  операторын аламыз.

Әрі қарай,  $i=1$  кезінде 1-болжам орындалды деп есептейміз. Ол бойынша  $L_2(\mathfrak{Z})$  кеңістігінде  $i=1$  кезінде шектелген  $\Lambda_1^{-1}$  оператор бар. Бұл бапта  $\Lambda_1^{-1}$  кері операторының құрылымын анықтаймыз. Сонымен,  $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі  $\bar{F}$  үшін операторлық теңдеуді  $\Lambda_1 \bar{Y} = \bar{F}$  қарастырамыз. Бізге оның  $\bar{Y} = \{y_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\} \in D(\Lambda_1)$  шешімін  $\bar{F} = \{f_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\} \in D(\Lambda_1)$  арқылы өрнектеу қажет. Бұрынғы жұмыстардан білетініміз [29],  $e_j$  доғасында  $y_j(x_j)$  функциясы, мына теңдеуді қанағаттандырады.

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), x \in e_j$$

Әрі қарай төмендегідей белгілеу енгізу ыңғайлы

$$y_j(x_j) = y_j(0)c_j(x_j) + y_j'(0)s_j(x_j) + \int_{e_j} g_j(x_j, t)f_j(t)dt. \quad (2.22)$$

мұнда  $\{c_j(x_j), s_j(x_j)\}$  Кошидің берілгендеріне бағынатын біртекті теңдеуінің іргелі шешімдерінің жиынтығы  $-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = 0$   $s_j'(0) = c_j(0) = 1$ ,  $s_j(0) = c_j'(0) = 1$ . Ендеше (2.22) формуласында  $\tilde{g}_j(x_j, t)$  берілген Коши функциясы, мына формуламен анықталады

$$\tilde{g}_j(x_j, t) = \begin{cases} c_j(t) & s_j(t) \\ c_j(x) & c_j(x) \end{cases}, t < x_j,$$

Әрі қарай белгілеу енгіземіз

$$g_j(x_j, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_j \leq t < 1 \\ \tilde{g}_j(x_j, t) & \text{при } 0 \leq t < x_j \end{cases}$$

Сонда (2.22) формуласы  $x_j \in e_j$  үшін келесі түрде болады

$$y_j(x_j) = y_j(0)c_j(x_j) + y'_j(0)s_j(x_j) + \int_{e_j} g_j(x_j, t)f_j(t)dt \quad (2.23)$$

$\Lambda_1^{-1}$  бар болғандықтан,  $y_j(0)$  және  $y'_j(0)$  мәндері  $\bar{F}$  арқылы бірмәнді анықталынады.  $\Lambda_1$  сызықты болғандықтан  $\Lambda_1^{-1}$  кері операторы сызықты. Бұдан,  $y_j(0)$  және  $y'_j(0)$  функционалдары  $\bar{F}$ -тен тәуелді екендігі шығады.  $\Lambda_1^{-1}$  шектелгендігінен  $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі  $y_j(0)$  және  $y'_j(0)$  сызықты функционалдардың шектелгендігі шығады. Бұдан,  $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі үзіліссіз сызықты функционалдар туралы Рисс теоремасынан  $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі  $A_j$  және  $B_j$  функцияларының бар болуы туралы тұжырымдама шығады.

$$y_j(0) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} a_{jk}(x)f_k(x)dx, \quad (2.24)$$

$$y'_j(0) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} b_{jk}(x)f_k(x)dx.$$

Онда (2.23) және (2.24) қатынастарынан алатынымыз

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^r \left\{ a_{jk}(t)c_j(x_j) + b_{jk}s_j(x_j) \right\} f_k(t)dt + \int_{e_j} g_j(x_j, t)f_j(t)dt. \quad (2.25)$$

Осылайша, белгіленген  $x_j \in e_j$  үшін (2.25) қатынасының оң жақ бөлігі  $L_2(\mathfrak{Z})$  кеңістігінің скаляр көбейтіндісі түрінде болатындықтан, (2.25) формуласы  $j = 1, \dots, r$  үшін мына түрде түрленеді

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} d_{jk}(x_j, t_k)f_k(t_k)dt_k, x_j \in e_j, \quad (2.26)$$

мұнда  $d_{jk}(x_j, t_k)$  - қандай да бір функциялар жиынтығы.

Сонымен,  $\Lambda_1^{-1}$  кері операторы (2.26) формуласы арқылы анықталады.  $D = \|d_{jk}(x_j, t_k)\|$  матрицасы әдетте  $\Lambda_1$  операторының Грин функциясы деп аталады.

Ескерту 2.2.  $\Lambda_1$  тарылуының орнына  $\Lambda_{\max}$  максимум операторының басқа қайтымды тарылуларын таңдап алуға болады. Нәтижесінде, біз келесі «кері оператордың тарылуының қарапайым түрі қандай болу керек?» деген сауалға келеміз. Мысалы,

$D(\Lambda_3) = \{\bar{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p-1, y_{p+1}(0) = y'_{p+1}(0) = 0\}$  анықталу облысындағы  $\Lambda_3 \subset \Lambda_{\max}$  кері операторының тарылуы келесі түрде болады

$$y_j(x_j) = \sum_{k=2}^{|s_j-1|} \int_{e_{n_{k,j}}} d_{n_{k,j}}(x_j, t) f_{n_{k,j}}(t) dt, x_j \in e_j. \quad (2.27)$$

Мұнда  $s_j = \{n_1, n_2, \dots, n_{|s_j|}, j\}$  0 және  $j$  төбелерін біріктіретін жол.  $n_1 = 0, n_2 = p+1, \dots, n_{|s_j|} = j$  екендігі анық. (2.27) формуласының (2.26) формуласынан айырмашылығы  $s_j$  жолы түзеленетін доға ретінде бейнеленеді. (2.26) формуласының оң жақ бөлігінен граф бұта болуы үшін, барлық доғалар (2.27) формуласымен анықталатынын көреміз.

## 2.7 Қисынды тарылуларды сипаттау

Бұл бапта М. Отелбаев [27, 30] ұсынған схема бойынша  $\Lambda_{\max}$  операторының қисынды тарылуының толық сипаттамасы беріледі.

$D(\Lambda_{\max})$  жиынының кез келген элементі  $\bar{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$  болсын. (2.26) формуласы бойынша жаңа функция енгіземіз

$$\bar{Z} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\} \quad \bar{Z} = \{z_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$$

$$z_j(x_j) \int_{e_k} d_{jk}(x_j, t_k) (-h_k''(t_k) + q_k(t_k) h_k(t_k)) dt_k, x_j \in e_j. \quad (2.28)$$

$\bar{Z}$  функциясы келесі қасиеттерге ие екендігі белгілі

$$-z_j''(x_j) + q_j(x_j) z_j(x_j) = -h_j''(x_j) + q_j(x_j) h_j(x_j), x_j \in e_j, \quad (2.29)$$

$$z_{p+1}(0) = 0, z_1(1) = z_2(1) = \dots = z_p(1) = 0, \quad (2.30)$$

$$\bar{Z} \in D(\Lambda_1) \subset D(\Lambda_{\max}) \quad (2.31)$$

Екінші жағынан, (2.4) Лагранж формуласын (2.28) қатынасының оң жақ бөлігіне қолдансақ,

$$z_j(x_j) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} (-d_{jk}''(x_j, t_k) + q_k(t_k) d_{jk}(x_j, t_k)) h_k(t_k) dt_k + \sum_{k=1}^p \left[ -h_k'(1) d_{jk}(x_j, 1) + h_k(1) \frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j, 1) \right] + \left[ -h_{p+1}'(0) d_{j,p+1}(x_j, 0) - h_k(0) \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) \right].$$

Бұдан, (2.29) және (2.30) қатынастарына сәйкес алатынымыз

$$z_j(x_j) = h_j(x_j) - h_{p+1}(0) \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) + \sum_{k=1}^p h_k(1) \frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j, 1) \quad (2.32)$$

Ендеше, келесі тұжырым орындалады..

Лемма 2.5. (2.32) теңдігі барлық  $\vec{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$  функциялар үшін орындалады, мұнда  $\vec{Z} = \Lambda_1^{-1}(\Lambda_{\max} \vec{H})$ .

2.5 леммадан төмендегі салдар туындайды.

Салдар 2.2. Мына теңдіктер  $j = 1, \dots, p$  үшін орынды

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{p+1,p+1}(x_{p+1}, 0) \Big|_{x_{p+1}=0} &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial t_k} d_{p+1,k}(x_{p+1}, 1) \Big|_{x_{p+1}=0} &= 0, \quad k = 1, \dots, p, \\ \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) \Big|_{x_j=1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_k} d_{j,k}(x_j, 0) \Big|_{x_j=1} &= \delta_{jk}, \quad k = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Бұдан, біріншіден, (2.32) теңдігі  $\vec{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$  барлық функциялар үшін орындалады, ал  $\vec{Z}$  функциясы қатынастарды қағаттандырады. Енді жаңа функцияларды келтірейік

$$w_j(x_j) = y_j(x_j) - h_{p+1}(0) \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) + \sum_{k=1}^p h_k(1) \frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j, 1), \quad x_j \in e_j \quad (2.33)$$

$j=1, \dots, r$  үшін, мұндағы  $\bar{H} D(\Lambda_{\max})$ -ғы кез келген функция,  $y_j(x_j)$  (2.26) формуласымен анықталған функция.

Теорема 2.3.  $\bar{W} = \{w_j(x_j), x_j \in e_j, j=1, \dots, r\}$  функциясы (2.33) формуласы арқылы енгізілген, келесі есептің шешімі болады

$$\Lambda_{\max} \bar{W} = \bar{F}, \bar{W} \in D(\Lambda_{\max}), \quad (2.34)$$

$$w_{p+1}(0) = h_{p+1}(0), w_j(1) = h_j(1), j = 1, \dots, r. \quad (2.35)$$

Сондай-ақ, (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі жалғыз, яғни (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі  $\{h_{p+1}(0), h_1(1), \dots, h_p(1)\}$  жиынына тәуелді, бірақ  $h_j(x_j), x_j \in e_j, j=1, \dots, r$  функцияларына тәуелді емес.

2.3 теремасының дәлелдеуі. 2.1 Салдардан (2.35) теңдігінің орындалуы түсінікті. (2.34) теңдігін тексеру үшін  $d_{jk}(x_j, t_k)$  Грин функциясын еске алсақ жеткілікті,  $\bar{X} = (x_1, \dots, x_r) \neq \bar{T} = (t_1, \dots, t_n)$  үшін сәйкес біртекті теңдеудің шешімі бола ма. Ұйғарым 2.1, (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі  $j = 1$  үшін жалғыз екендігін көрсетеді. Осылайша, 2.3 теореманың дәлелі орындалды.

Енді  $\Lambda_{\max} \bar{Y} = \bar{F}$  теңдеуінің қисынды шекаралық шарттарын қалай құруға болатынын көрсетейік 2.3 теоремасын қолдана отырып.  $\bar{H} \bar{F}$ -тен үзіліссіз тәуелді екенін дәлелдесек жеткілікті. 2.3 теоремасында, яғни  $D(\Lambda_{\max})$  тиесілі  $L_2(\mathfrak{Z})$ -ден  $\bar{F}$ -ті бейнелейтін  $K$  операторы бар.

Сонымен,  $\bar{H} = K\bar{F}$  болсын. Онда (2.34) - (2.35) есебімынадай түрде жазылады

$$\Lambda_{\max} \bar{W} = \bar{F}, \bar{W} \in D(\Lambda_{\max}) \quad (2.36)$$

$$w_j(1) = (K\Lambda_{\max} \bar{W})_j(1), j = 1, \dots, r, w_{p+1}(0) = (K\Lambda_{\max} \bar{W})_{p+1}(0) \quad (2.37)$$

$\bar{W}$  функциясына қойылған (2.37) шартын, (2.36) теңдеуінің кез келген  $\bar{F}$  оң жақ бөлігіне шешімнің жалғыз болуы үшін қосымша шарттармен өзгертуімізге болады. Осылайша, (2.36) - (2.37) әрбір есебі жаңа «шекаралық» шарттары (2.37) бар қисынды қойылған есеп болып табылады. Осылайша, келесі тұжырым орынды болады.

Теорема 2.4.  $L_2(\mathfrak{Z})$  кеңістігін  $D(\Lambda_{\max})$ -да бейнелейтін барлық үзіліссіз  $K$  операторлары үшін (2.36)-(2.37)  $L_2(\mathfrak{Z})$ -гі  $\bar{F}$  үшін жалғыз орнықты шешімдері бар. Кері тұжырым да орынды.

2.4 теоремасындағы  $K$  операторына сәйкес болатын тарылуды  $\Lambda_K$  арқылы белгілейміз. 2.3 теоремасынан теореманың тура тұжырымдамасы дәлелдеуі шығады. Кері тұжырымның дәлелі [25]-тегі 5 теореманың дәлеліне ұқсас.

*Мысал.*  $K$ - операторы 2.4 теоремасына сай, мына формула арқылы анықталған болсын,

$$(K\vec{F})_j(x_j) = \sum_{s=1}^r d_{js}(x_j, t_s) f_s(t_s) dt_s.$$

Онда қисынды тарылу  $\Lambda_K \subset \Lambda_{\max}$  шекаралық есепке сәйкес келеді, яғни оның анықталу облысы келесі шекаралық шарттармен беріледі.

$$D(\Lambda_k) = \{ \vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_j(\vec{Y}) = 0, j = 1, \dots, p+1 \},$$

мұнда  $U_1(\cdot), \dots, U_{p+1}(\cdot)$ - қандай да бір скаляр коэффициенттері бар (2.8) формуласымен анықталған шекаралық формалар.

М. Отелбаевтың ұсынып отырған қисынды тарылуларды сипаттауға арналған схемасы [25, 26] жұмыстарындағы дербес туындылы теңдеулерге қолданылды.

### **3 ШЕКАРАЛЫҚ БЕКІТІЛУДІ БІРМӘНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУДЕ МЕНШІКТІ ЖИІЛІКТІң МИНИМАЛ САНЫН АНЫҚТАУ. ҚОСЫМША МЫСАЛДАР**

Бұл тарауда практикалық есептер қарастырылады. Техникалық диагностиканың маңызды бөлігі механизмдердің шуылымен күресуге негізделген. Резонанс режиміндегі механизмнің қандай да бір тербелістерінің меншікті сипаттамалары акустикалық диагностикамен анықталады. Модельдік ахуал ретінде ұштары бекітілген шарттардағы сырық тандап алынды. Мынадай модельдік жағдай қарастырылады: белгілі көпірде бірнеше жүк тиелген автокөліктер тұр. Олардың сырықтың, яғни көпірдің, иілу тербелістерінің жиіліктеріне әсері қандай? Осыған ұқсас проблемалар [39],[40],[41],[42] жұмыстарында зерттелді. Келесі жұмыста [43] иілу тербелісінің екі жиіліктері арқылы жүктің шамасы мен орналасу координаттарын қалпына келтіру әдісі ұсынылды. Ұсынылып отырған әдіс [40], [41] жұмыстарындағы әдістерден өзгеше.

Сонымен, қолданбалы маңызы мен теориялық маңызын ескере отырып, құбырдың және оны әр түрлі жағдайда толтыратын сұйықтықтың бірлескен қозғалысы проблемаларын зерттеудің өзектілігі сөзсіз. Осындай зерттеулерді М.А.Илгамовтың [44] және Дж. Томсон [45] еңбектерінен де кездестіруге болады. А.М.Ахтямовтың «Сұйықтық пен газы бар серпімді қабықшалардың тербелісі» еңбегінде [46, 47] сұйықтықтың қозғалмайтындығы қарастырылған.

Келесі жұмыста [48] ағынды сұйықтықпен құбырдың тікелей және иілу деформациясы жағдайларындағы құбылысты қарастыру ұсынылады. Сондай-ақ, [49] жұмысында құбырлар тегіс емес жерге төселген сырықтың бойлық тербелісінің теңдеуіндегі функциясын жиіліктерін екі ақырлы жиынтық бойынша қалпына келтірілді. Ұсынылып отырған алгоритім Шур алгоритімін қолданбайды. Соған байланысты сандық көрнекі мысалдар келтірілді. Құбырдың орнықтылығы [50] жұмысында шағын шамадағы көлденең ауытқудың дифференциалдық теңдеуінің сандық шешімін MAPLE программалық пакетінде табылды.

Бұл тараудың жаңа аспектісі – шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минимал саны анықталып, қолданыс табатын мысал келтірілді. Көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің сындарлы жылдамдығына әсер ететін шамалар анықталды. Иілген құбырдың ішкі қысымы табылды және меншікті жиіліктерін табу алгоритімі ұсынылды. Құбырдың шеттерінің бекітілулері 5 жиілікпен бір мәнді анықталатындығы көрсетілді.

#### **3.1 Көпірдің сындарлы жылдамдығы**

Семей қаласындағы көпір - Қазақстанның Семей қаласындағы Ертіс өзіні арқылы өтетін жер сілкінісіне төзімді аспалы көпір.





5-сурет Семей қаласындағы көпір

Платформа тіреулермен бікітілген. Тіреулер арасы тросттармен байланған және платформа жоғарыданда тростпен байланған. Платформа ұзындығы басқа өлшемдерінен өте үлкен.

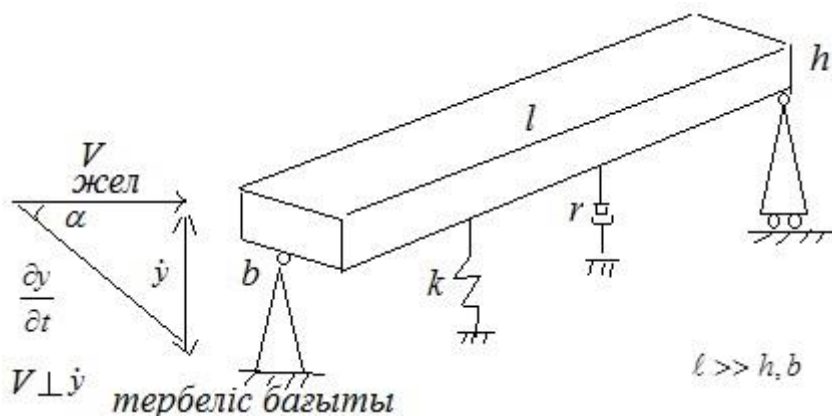
Енді бүйірден соғатын желдің көпірге әсерін қарастырайық. Тарихта жел әсерінен көпірдің құлау жағдайлары болғаны белгілі. Оның себебі, жел жылдамдығы сындарлы жылдамдыққа жеткенде, платформа тербелісінің амплитудасы шексіз өседі де, көпірде ақау пайда болады. Соның салдарынан көпір құлауы да мүмкін.

Серпімді, иілетін конструкцияға соғатын бір қалыпты желді қарастырайық. Ол амплитудасы жоғары тербелістерді тудыруы мүмкін. Осындай жоғары амплитудалы тербелістер қирау алдында тұрған аспалы Такома Нэрроуз көпірінде келтірілген [45].

Мысалы, серіппе мен амортизатор арқылы вертикал жазықтыққа қозғалып отыратын қимасы тіктөртбұрыш болатын призманы қарастырайық. Вертикалық бағыттағы ауытқуды уақытқа байланысты  $y$  өсі болсын. Призмаға жылдамдығы  $V$  болатын жел соғып тұр. Призма  $y$  жылдамдықпен төмен қарай қозғалғанда, үшбұрыштар жылдамдығында көрсетілгендей призмаға қатысты желдің жылдамдығы  $v_R$  болады. Бұл желдің салыстырмалы күшінің вертикал компонентін туғызады. Квазистатикалық жуықтауда өз кезегінде  $y$  ден тәуелді  $S$  күшінің коэффициенті  $\alpha$  бұрышына тәуелді. Төмендегі диаграммада  $S$  ның  $\alpha$  дан тәуелділігінің әдеттегі екі түрі көрсетілген. Бұл тәуелділіктерді стационар иілген профилдердің аэродинамикалық тәжірибесі кезінде Паркинсон мен Брукс алған.

Жел теріс демпфрлеуге әкелетінін көреміз, сондай-ақ, тұрақты  $r$  амортизаторға пропорционал желдің жылдамдығы кезінде Хопс динамикалық бифуркациясы түріндегі орнықсыздықты туғызады. Демпфер болмаған жағдайда көпірде қандайда әлсіз соққан желдің әсерінен ақау пайда болуы мүмкін?. Бұл консервативті жүйенің құрлымдық орнықсыздығын көрсетеді.

Осы мәселені қарастыру үшін, платформаның қарапайым сызбасын салып, зерттелік. Тростты серіппемен, демпфермен алмастырып, платформаны призма ретінде қарастырайық. Призманың өлшемдерін былай белгілейік.  $l$ -платформа ұзындығы,  $h$ -платформа қалыңдығы,  $b$ -платформаның ені. Платформаның ұзындығы, ені мен қалыңдығынан өте ұзын  $l \gg h, b$  болғандықтан, көпірді сырық ретінде қарастыруымызға әбден болады.



6-сурет. Платформаға желдің әсері

Жел платформаның бүйір бетінен тұрақты  $V$ - жылдамдығымен соғады. Платформаның өзі жоғары-төмен тік бағытта тербеледі. Платформаның төмен қарай  $\dot{y}$  жылдамдықпен қозғалғанда, онда платформаға қатысты жел жылдамдығын  $\vec{V}_R$ -деп белгілейік. Демек,  $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ . Онда  $\vec{V}_R$ - күштерінің тік компоненті келесі формуламен беріледі:

$$F_V = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \cdot C(\alpha),$$

мұндағы  $\rho$ -ауа тығыздығы.  $V$ -жел жылдамдығы.  $C(\alpha)$ - аэродинамикалық тәжірибелерден алынған коэффициент [51]

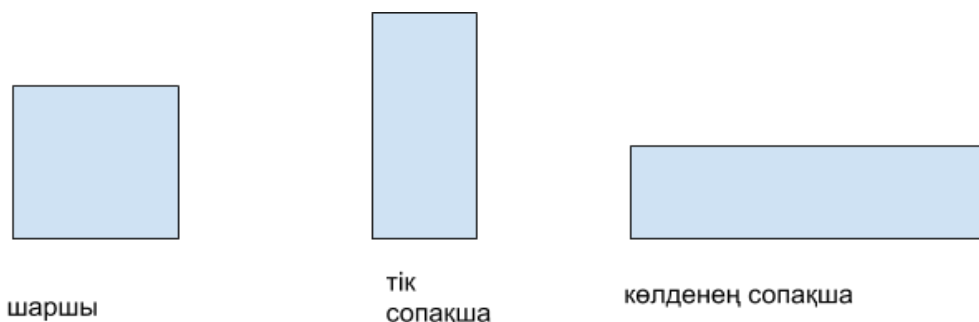
$$C(\alpha) = A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + A_5 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^5 - A_7 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^7.$$

Бұл  $C(\alpha)$  шама жылдамдықтардың қатынасына тәуелді  $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ . Нақтырақ айтсақ  $C(\alpha)$  коэффициенті  $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$  шамасына қатысты көпмүше. Ол көпмүшеге аталған қатынастың тақ дәрежелері кіретіндігі [51] жұмыста көрсетілген.

$$C(\alpha) = A_1 tg\alpha - A_3 tg^3\alpha + A_5 tg^5\alpha - A_7 tg^7\alpha$$

мұндағы  $A_1, A_3, A_5, A_7$  - коэффициенттері платформаның қимасына тәуелді екені аэродинамикалық тәжірибелерден анықталған. Үш түрлі қима

қарастырылады. Көлденең сопақша қима кезінде желдің күші платформаға ең аз күшпен соғады.



7-сурет

Онда платформаның тік бағытынағы күштердің тепе-теңдік теңдеуі келесі формуламен беріледі

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2}\rho V^2 \ell h C(\alpha) \quad (3.1)$$

мұндағы  $m\ddot{y}$  -инерция күші,  $r\dot{y}$  -демпфер күші,  $Ky$  -серпімділік күші.,  $\frac{1}{2}\rho V^2 \ell h C(\alpha)$  -жел күшінің вертикал компоненті туғызатын күш. Көпір үш өлшемді. Бұл (6.17) теңдік уақытқа  $t$  байланысты екінші ретті сызықтық карапайым дифференциалдық теңдеу. Яғни бір өлшемді теңдеу, одан  $y$  тің  $t$  ға тәуелді ауытқуын табамыз.

Алдымен  $C(\alpha)$ -тің бірінші дәрежелі мүшесін ескерейік.  $A_1 \tan \alpha$  ны (3.1). теңдеудегі  $C(\alpha)$  ның орнына қоямыз. Ол кезде теңдеу келесі түрге өзгереді.

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2}\rho V^2 \ell h A_1 \tan \alpha$$

мұндағы  $\tan \alpha = \frac{\dot{y}}{V}$  екені белгілі, онда теңдеуіміз төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky &= \frac{1}{2}\rho V^2 \ell h A_1 \frac{\dot{y}}{V} \\ m\ddot{y} + r\dot{y} - \frac{1}{2}\rho V^2 \ell h A_1 \frac{\dot{y}}{V} + Ky &= 0 \\ m\ddot{y} + \left( r - \frac{1}{2}\rho V \ell h A_1 \right) \dot{y} + Ky &= 0 \end{aligned}$$

оң жағындағы  $\dot{y}$  алдындағы  $\left( \frac{1}{2}\rho V \ell h \cdot A_1 \right)$  демпфр коэффициентіне ұқсайды.

$$F_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \cdot A_1 \frac{\dot{y}}{V} = \left( \frac{1}{2} \rho V \ell h \cdot A_1 \right) \cdot \dot{y} \quad (3.2)$$

Онда келесі шама  $[r - \frac{1}{2} \rho V \ell h \cdot A_1]$ -маңызды екені көрінеді. Бұл шаманың таңбасы  $V$ -желдің жылдамдығына байланысты. Осы айырмды нөлге теңестіріп, теңдеуді түрлендірсек, онда  $V^c = \frac{2r}{\rho \ell h \cdot A_1}$  екендігі шығады. Егер  $v^c$ -сындарлы жылдамдық деп атасақ, онда

- 1)  $0 < v < v^c$  болғанда тербеліс бірте-бірте өшеді.
- 2)  $v > v^c$  болғанда тербеліс амплитудасы шексіз өседі.

Жоғарыда  $C(\alpha)$ -нің бірінші дәрежелі мүшесін ғана пайдаланып желдің  $v^c$ -сындарлы жылдамдығын есептедік. Енді толық мүшесін  $C(\alpha) = A_1 t g \alpha - A_3 t g^3 \alpha + A_5 t g^5 \alpha - A_7 t g^7 \alpha$  пайдаланып желдің  $v^c$ -сындарлы жылдамдығын есептейік.

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h (A_1 t g \alpha - A_3 t g^3 \alpha + A_5 t g^5 \alpha - A_7 t g^7 \alpha)$$

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \left( A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + A_5 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^5 - A_7 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^7 \right)$$

Аэросерпимді осциллятордың қозғалыс теңдеуі келесі түрде болады:

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h C(\alpha)$$

$C(\alpha)$  тәжірибелік тәуелділік графигіне сүйене отырып,  $C$  коэффициентін  $t g \alpha = \frac{\dot{y}}{V}$  бойынша дәрежелік қатар түрінде көрсетеміз, бұдан алатын теңдеуіміз

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \left( A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + A_5 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^5 - A_7 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^7 \right)$$

Бұл жерде призманың көлденең қимасының симметриялығынан тек қана тақ дәрежелері жазылды. Коэффициенттің алдындағы оң және теріс таңбалары келісілетін мәселе және келтірілген жазба квадрат призманың барлық  $A_i$  коэффициенттері үшін оң болатынына кепілдік береді.

Бұл теңдеуді сызықтандыру кезінде  $C$  қатарының тек алғашқы мүшесін сақтап қойған жөн, сонда  $\dot{y}$  кезінде нәтиже беруші коэффициент  $r - \frac{1}{2} \rho V^2 a(A_1/V)$  шамасына тең болады. Біздің квадрат призмамыздың  $A_1$  оң

болған кезде  $V^c = \frac{2r}{\rho \ell h \cdot A_1}$  шамасына тең болатын желдің сындарлы

жылдамдығы кезінде мұндай нәтиже беруші демпфрлеу жоғалып кетеді.

Осылайша, кез-келген бастапқы шағын ауытқулар үшін  $v^c$  кіші мәндерінде  $V$  жылдамдығының алғашқы өзгерісі өше бастайды, бірақ  $v^c$  дан үлкен болатын болса тербелістің экспоненциалды өсуін туғызатын демпфрлеудің қосындысының мәнінің теріс болғандығынан шағын өзгерістер өсе бастайды. Бұдан шығатыны, кез келген  $V$  үшін орынды болатын  $y = 0$  тривиалды тепе - теңдік шешімі желдің  $v^c$  сындарлы жылдамдығы кезінде орнықсыз болып келеді.

Бұл - сындарлы жылдамдықтан жоғары кезде сызықты теория тербелістің шектеусіз экспоненциалды өсуін болжайдытындығын көрсетеді. Шындығында да  $C$  қатарының жіктелугенде, жоғары мүшелер ақырлы амплитуданың шекті циклының пайда болуына соқтырады.  $V$  мәні  $v^c$  мәніне өткен кезде шекті циклдің өлшемі нөлден бастап өсе бастайды.

$C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициентінің кейбір жағдайларында эксперимент арқылы [52] жұмысында Новак алған нәтижесін талқылап, келесі қортындыларға келеміз. 9-суретте көпірдің қимасы тік төртбұрышты көлденең сопақша болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайға сәйкес  $C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады:

$$C(\alpha) = K(tg\alpha - 4tg^3\alpha - tg^5\alpha - 4tg^7\alpha).$$

Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 9-суретте көрсетілген. 9-суретте байқағанымыздай  $C(\alpha)$

коэффициенті  $\alpha$  бұрышымен  $\left(0, \frac{3\pi}{32}\right)$  интервалында бірге өседі және дөңес

функция болады, ал  $\alpha$  бұрышы  $\left(\frac{3\pi}{32}, \frac{5\pi}{32}\right)$  интервалында бірге кемиді және

дөңес функция болады.

> restart

> with(plots) :

> A1 := 1 :

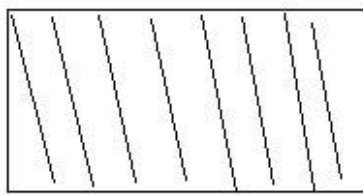
> A2 := 4 :

> A3 := 1 :

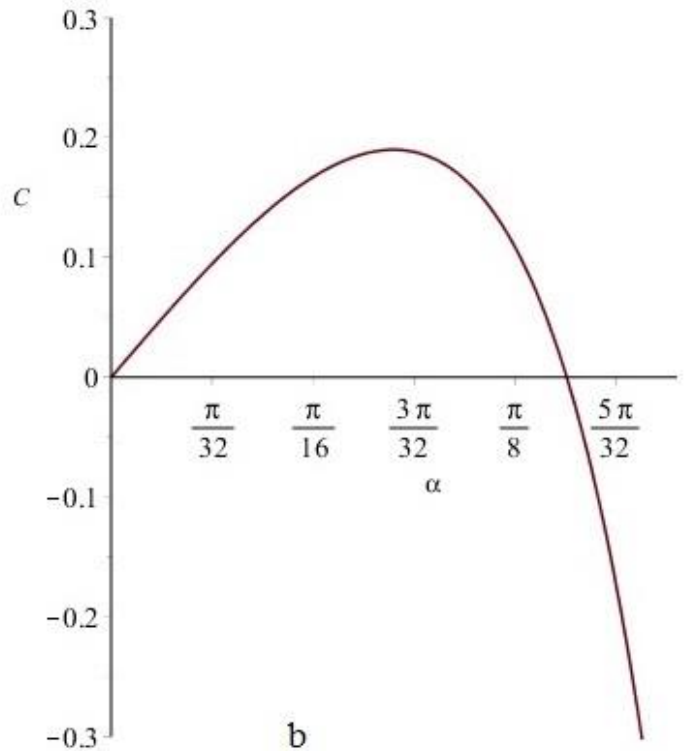
> A4 := 4 :

> C :=  $\alpha \rightarrow A1 \cdot \tan(\alpha) - A2 \cdot (\tan(\alpha))^3 - A3 \cdot (\tan(\alpha))^5 - A4 \cdot (\tan(\alpha))^7$  :

> plot(C( $\alpha$ ),  $\alpha = 0..0.2 \cdot \pi$ , C = -0.3..0.3)



a



b

9-сурет. а-көлденең сопақша призма, б- у тербелісінің амплитудасы графигі.

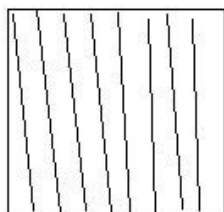
Екінші жағдайда, 10-суретте көпірдің қимасы квадрат болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайға сәйкес  $C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады.

$$C(\alpha) = K(2tg\alpha + 80tg^3\alpha + 300tg^5\alpha - 800tg^7\alpha)$$

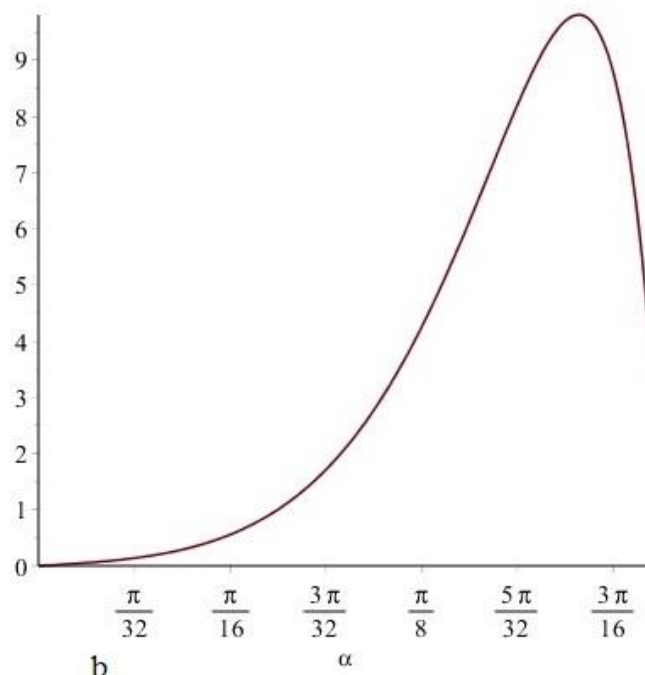
Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 10-суретте көрсетілген. 10-суретте байқағанымыздай  $C(\alpha)$  коэффициенті  $\alpha$  бұрышымен  $\left(0, \frac{5\pi}{32}\right)$  интервалында бірге өседі және ойыс функция болса, ал  $\alpha$  бұрышы  $\left(\frac{3\pi}{32}, \frac{3\pi}{16}\right)$  интервалында бірге кемиді және дөңес функция болады. Сонымен көпірдің қимасы квадрат болғандағы жағдайда  $C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті көпірдің қимасы көлденең сопақша болған жағдаймен салыстырғанда мүлде басқаша өзгереді екен.

- > restart
- > with(plots) :
- > B1 := 1 :
- > B2 := -40 :
- > B3 := -150 :
- > B4 := 400 :

- >  $P := \alpha \rightarrow B1 \cdot \tan(\alpha) - B2 \cdot (\tan(\alpha))^3 - B3 \cdot (\tan(\alpha))^5 - B4 \cdot (\tan(\alpha))^7 :$
- >  $P1 := \text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.2 \cdot \pi) :$
- >  $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.2 \cdot \pi)$



a



b

10-сурет. а-квадрат призма, б- у тербеліс амплитудасы графигі.

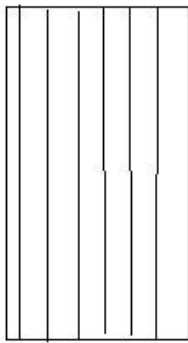
Үшінші жағдайда, 11-суретте көпірдің қимасы тіктөртбұрышты тік сопақша болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайда сәйкес  $C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады.

$$C(\alpha) = K(3tg\alpha - 12tg^3\alpha + 450tg^5\alpha + 12000tg^7\alpha).$$

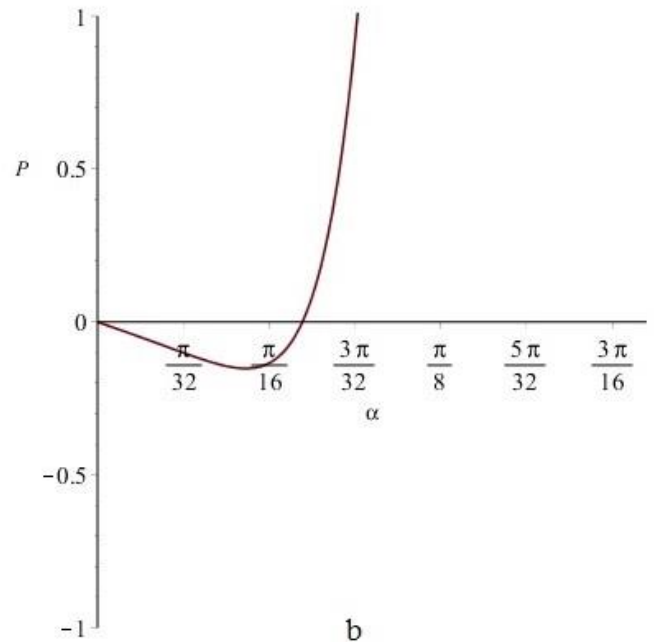
Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 11-суретте көрсетілген. 11-суретте байқағанымыздай  $C(\alpha)$  коэффициенті  $\alpha$  бұрышымен  $\left(0, \frac{\pi}{16}\right)$  интервалында бірге кемиді, теріс мәндер қабылдайды және ойыс функция, ал  $\alpha$  бұрышы  $\left(\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{32}\right)$  интервалында бірге өседі және ойыс функция. Бұл жағдайда  $C(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті теріс мәндер қабылдайтынын байқадық. Осы аталған қасиет алдындағы жағдайлармен салыстырғандағы теріс мәндерімен ерекшеленеді.

- > *restart*
- > *with(plots) :*
- >  $Q1 := -1 :$
- >  $Q2 := 4 :$
- >  $Q3 := -150 :$

- >  $Q4 := -4000 :$
- >  $P := \alpha \rightarrow Q1 \cdot \tan(\alpha) - Q2 \cdot (\tan(\alpha))^3 - Q3 \cdot (\tan(\alpha))^5 - Q4 \cdot (\tan(\alpha))^7 :$
- >  $P1 := \text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.2 \cdot \pi) :$
- >  $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.1 \cdot \pi, P = -1 .. 1) :$
- >  $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0.0 \cdot \pi .. 0.2 \cdot \pi, P = -1 .. 1)$



a



b

11-сурет. а-тік сопақша призма, б- у тербеліс амплитудасы графигі.

Соңғы жағдайда  $c(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті алдымен теріс болады. Бұл - динамикалық бифуркация жоқ екенін білдіреді. Біраздан кейін  $c(\alpha)$  аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті оң мәндер қабылдайды. Сондықтан, үлкен ауытқулары бар шекті циклдар пайда болады. Паркинсон мен Смит жұмысына [53] қарап, алдымен көпір қимасының квадрат болған жағдайын жете талқылайық. Бұл жағдайда 9-суретте көрсетілгендей :

$$A_1 = 2, A_3 = -80, A_5 = -300, A_7 = 800.$$

Бұл коэффициенттер аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелермен сәйкес келетінін алдында атап өткіземіз. Сандық есептеу жүргізіу үшін әуелі өлшемсіз шамаларға көшеміз.

Ол үшін жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$Y = y/h, \tau = \omega t, \omega^2 = k/m, U = V/(\omega h),$$

$$n = \rho h^2 l / (2m), \beta = r / (2m\omega)$$

Сонда қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады



$$\ddot{Y} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{Y} + Y = n \cdot U^2 \cdot C(\alpha),$$

мұндағы нүкте таңбасы  $\tau$  бойынша туындыны білдіреді. Бұл теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\ddot{Y} + Y = nA_1 \left\{ \left( U - \frac{2\beta}{nA_1} \right) \dot{Y} - \left( \frac{A_3}{A_1 U} \right) \dot{Y}^3 + \left( \frac{A_5}{A_1 U^3} \right) \dot{Y}^5 - \left( \frac{A_7}{A_1 U^5} \right) \dot{Y}^7 \right\}.$$

Мұндағы  $U$  параметрінің сындарлы мәні  $U^c = 2\beta/(nA_1)$ . Қозғалыс теңдеуін келесі түрде жазамыз:

$$\ddot{Y} + Y = F(\dot{Y}).$$

Бұл теңдеуді Крылов – Боголюбовтың бірінші жуықтауымен шешеміз

$$Y = A \cos(\tau + p).$$

Мұндағы  $A$  амплитудасы мен  $p$  фазасы уақыттың  $\tau$  параметріне тәуелді баяу өзгертін функциялары. Амплитуда мен фазаның баяу өзгеруін өрнектейтін жуық теңдікті аламыз

$$\dot{Y} = -A \sin(\tau + p).$$

Қозғалыс теңдеуін  $\dot{Y}$  көбейтіп, алатынымыз

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (Y^2 + \dot{Y}^2) = \dot{Y} F(\dot{Y}),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} A^2 = -A \sin(\tau + p) F(-A \sin(\tau + p)).$$

Циклдің периоды амплитуда өзгертін уақыт аралығымен қарағанда үлкен болмайды деп есептеп, оң жақ бөліктің цикл периоды бойынша орта мәнін аламыз

$$\frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin v F(-A \sin v) dv.$$

Соңғы өрнекке  $F$  күшін қойып, интегралдасак:

$$\frac{dA^2}{d\tau} = nA \left\{ \left( U - \frac{2\beta}{n} \right) A^2 - \left( \frac{-40}{U} \right) A^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{-40}{U^3} \right) A^4 + \frac{5}{8} \left( \frac{-150}{U^3} \right) A^6 - \frac{35}{64} \left( \frac{400}{U^5} \right) A^8 \right\}.$$

Алынған қатынас жұмыс балансының сипатын иеленетінін көреміз, мұндағы энергияның артуы жылдамдыққа тәуелді жұмыс балансына теңестіріледі. Бұл талдауда  $p$  шамасы жоқ екендігін байқаймыз, бірінші жуықтауда нөлге тең деп алынуы мүмкін.

Тұрақты амплитудасы бар шекті циклдің  $A^2$  өзгеру жылдамдығын нөлге тең деп алуға болады, онда

$$\left( U - \frac{2\beta}{n} \right) A^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{-40}{U} \right) A^4 + \frac{5}{8} \left( \frac{-150}{U^3} \right) A^6 - \frac{35}{64} \left( \frac{400}{U^5} \right) A^8 = 0.$$

Теңдеуді  $A^2$  шамасына қысқартып,  $U^c$  қатынасын қоятын болсақ:

$$U - U^c = \left( \frac{3(-40)}{4} \right) \frac{A^2}{U} - \left( \frac{5(-150)}{8} \right) \frac{A^4}{U^3} + \left( \frac{35 \cdot 400}{64} \right) \frac{A^8}{U^5},$$

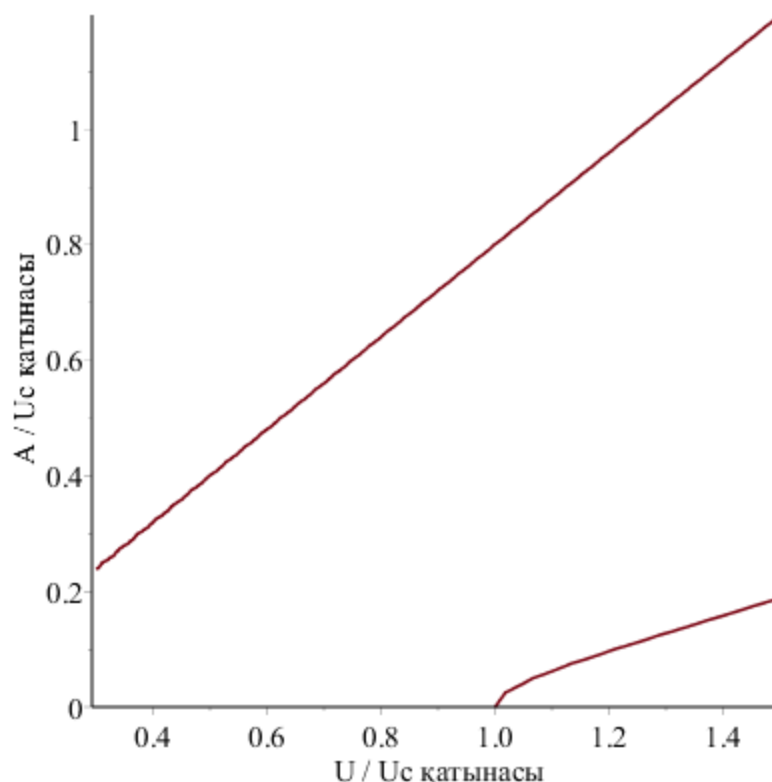
Бұдан  $U = U^c$  кезінде динамикалық бифуркация орын алатынын көреміз. Бірінші жуықтаудағы сындарлы әрекеттер үшін

$$U - U^c = \left( \frac{3(-40)}{4} \right) \frac{A^2}{U^c}$$

Орнықты типтегі динамикалық бифуркацияда  $U^c$  мәнінен өтіп,  $U$  артқан сайын өсіп отыратын орнықты шекті циклі бар екендігі анық. Онда жоғарыдағы өрнекті  $U$  ға бөліп, алатынымыз

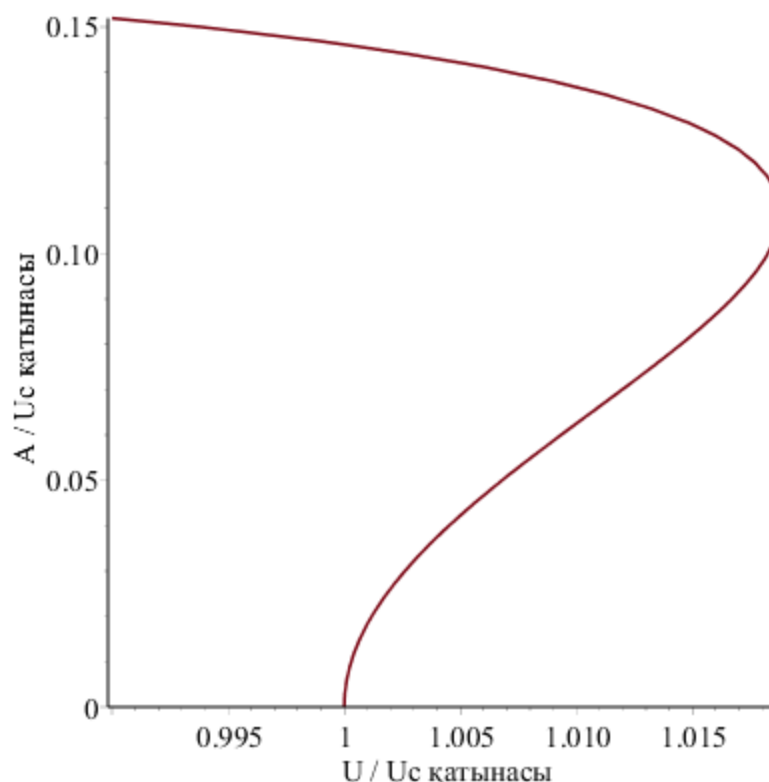
$$1 - \frac{U^c}{U} = \left( \frac{3 \cdot (-40)}{4} \right) \left( \frac{A}{U} \right)^2 - \left( \frac{5 \cdot (-150)}{8} \right) \left( \frac{A}{U} \right)^4 + \left( \frac{35 \cdot (400)}{64} \right) \left( \frac{A}{U} \right)^8$$

Бұдан,  $U$  шексіздікке ұмтылатынын, теңдеудің сол жақ бөлігі бірлікке ұмтылатынын байқаймыз, осыдан  $A/U$  қандай да бір тұрақты мәнге ұмтылатындығы шығады. Бұл  $A$ -ның  $U$ -дан тәуелді графигі координаттар басынан өтетін асимптотаға ұмтылатынын білдіреді. Сондай-ақ  $A/U^c$  -ның  $U/U^c$  -дан тәуелділігін құратын болсақ, онда  $n$  және  $\beta$  шамаларына тәуелді жалғыз қисық бар болады.



12-сурет. Көпір қимасы шаршы болғандағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы тәуелділігі

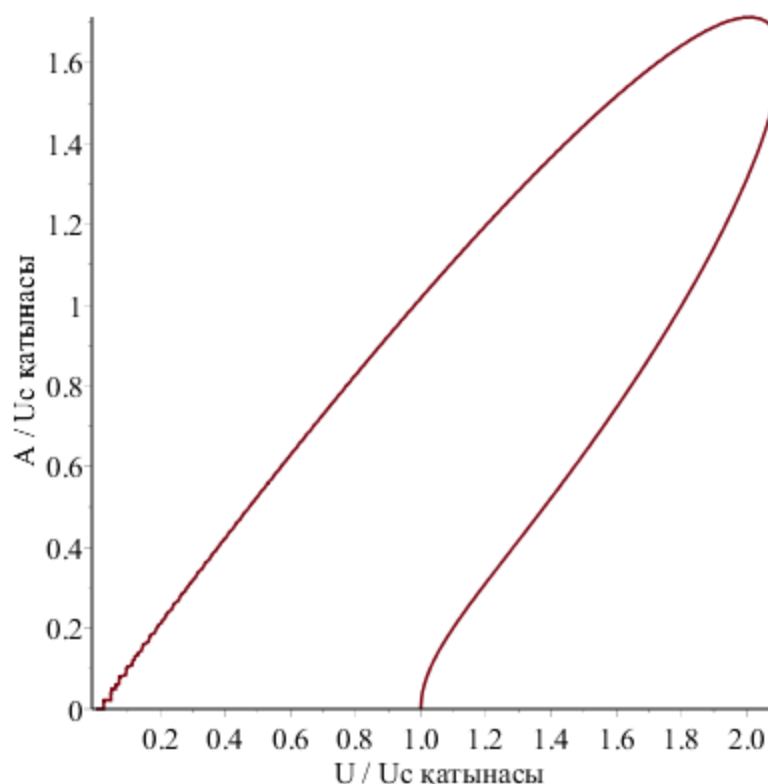
12-суретте көпірдің қимасы шаршы формалы болғандағы тербеліс жағдайындағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы байланысының графигі көрсетілген. 12-суреттен байқағанымыздай жылдамдықтың  $U/U^c \in (0;1)$  аралығында жатқандағы мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал  $U/U^c \in (1;1.4)$  аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады. Демек бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер  $U/U^c = 1.2$  болғанда амплитуда  $A/U^c$  алдымен  $A/U^c = 0.1$  қабылдайды да, одан кейін амплитуда бірден  $A/U^c = 0.9$  мәніне секіреді. Сондықтан жылдамдық  $U/U^c$  бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін.



13-сурет. Көпір қимасы тік сопақша болғандағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы тәуелділігі

13-суретте көпірдің тік сопақша формасы болғандағы, тербеліс жағдайындағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы байланысының графигі көрсетілген. 13-суреттен байқағанымыздай жылдамдық  $U/U^c \in (0;1)$  аралығында жатқанда мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал  $U/U^c \in (1;1.015)$  аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады. Демек, бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер  $U/U^c = 1.015$  болғанда амплитуда  $A/U^c$  алдымен  $A/U^c = 0.05$  қабылдайды, одан кейін амплитуда бірден  $A/U^c = 0.14$  мәніне секіреді. Сондықтан, жылдамдық  $U/U^c$  бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін.

14-суретте көпірдің көлденең сопақша формасы болғандағы, тербеліс жағдайындағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы байланысының графигі көрсетілген. 14-суреттен байқағанымыздай жылдамдық  $U/U^c \in (0;1)$  аралығында жатқанда мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал  $U/U^c \in (1;2)$  аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады.



14-сурет. Көпір қимасы көлденең сопақша болғандағы  $U/U^c$  жылдамдық пен  $A/U^c$  амплитуда арасындағы тәуелділігі

Демек бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер  $U/U^c = 1.2$  болғанда амплитуда  $A/U^c$  алдымен  $A/U^c = 0.3$  қабылдайды, одан кейін амплитуда бірден  $A/U^c = 1.3$  мәніне секіреді. Сондықтан жылдамдық  $U/U^c$  бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін.

Сонымен желдің  $U$  жылдамдығы сындарлы  $U^c = 2\beta/(nA_1)$  мәнінен артық болғанда қолайсыз бифуркация құбылыстары пайда болады. Сондықтан, мұндай жағдайда көпірді пайдалану қауыпты. Сындарлы жылдамдық қайсы қимаға байланысты ең үлкен мән қабылдайтыны төмендегі кестеден көрсетілген.

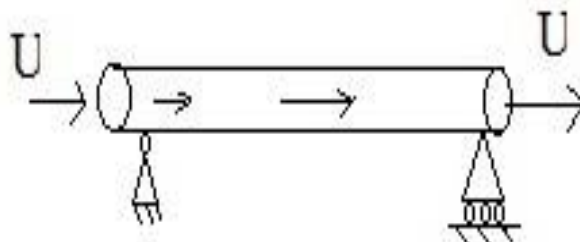
Қиманың формасы	Сындарлы жылдамдық $U^c = 2\beta/(nA_1)$
Шаршы	$A_1 = 2$
Тік сопақша	$A_1 = 12$
Көлденең сопақша	$A_1 = 1$

Көпір қимасының үш түрлі формасын салыстыра отырып, жоғарыдағы кестеден максимум сындарлы жылдамдық көпірдің қимасы көлденең сопақша болған жағдайда, яғни  $A_1 = 1$  кезінде пайда болатынын байқаймыз.

### 3.2 Иілген құбырдан сұйықтық аққан кездегі орнықтылық есебі

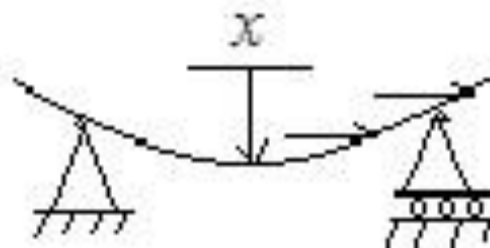
Бұл бөлімде қолданыстағы тасымал құбырларының екі шетінде ақау пайда болғанда, ақауды анықтау жолы ұсынылады. Әдетте, құбырдың екі шеті ашық жерде орналасқанда тәжірибелі инженерлер ақауды оңай анықтайды. Кей жағдайларда құбырдың екі шеті жер астында немесе су астында болуы инженерлер жұмысын қиындатады. Инженерлер тікелей бақылай алмаса, қосымша әдістер арқылы, мысалы сұйықтық аққан құбырдың дыбысын “есту” арқылы, яғни акустикалық диагностика әдісі арқылы ақауды анықтау қазіргі кездегі өзекті мәселені білдіреді.

Алдымен  $L$  ұзындықтағы, шеттері топсалы бекітілген 15-суретте көрсетілгендей құбырды қарастырайық.  $r$ -құбырдың сыртқы радиусы,  $r_1$ -құбырдың ішкі радиусы,  $r-r_1$  айырымы құбырдың қалыңдығы,  $m$ -құбыр массасы,  $E$ - серпімділік модулі,  $J$ - инерция моменті деп белгілеп алайық.



15-сурет. Құбыр

Құбырда  $U$  жылдамдықпен сұйықтық ақсын. Оның массасы  $M$  болсын. Сұйықтық ақпағандағы жылдамдықты  $U=0$  деп белгілейік. Құбырды пайдалану кезінде шағын көлденең тербелістер пайда болады. Инженерлер балғамен құбырды ұру арқылы диагностикалайды. Біз осы кездегі тербелістер жиіліктерін табайық. Алдымен құбырдың қозғалысының тепе-теңдік теңдеуін жазайық. 16-суретте құбырдың элементар бөлігінің сызбасы берілген.



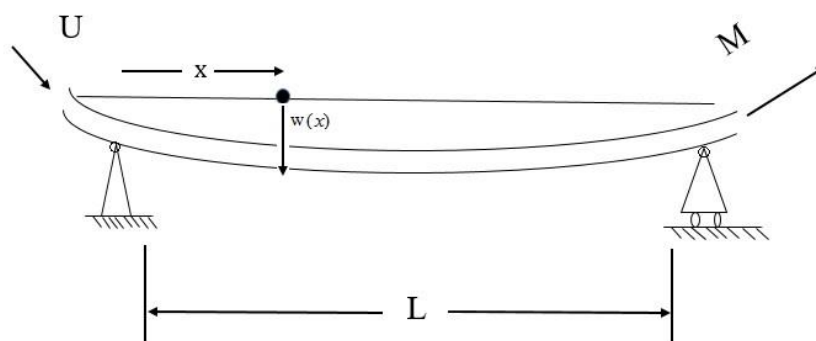
16-сурет құбырдың элементар бөлігі

мұндағы  $w(x)$ -құбырдың көлденең тербелісінің ауытқуы,  $x$ -құбыр өсінің бойымен өзгеретін айнымалы шама. Құбырдың элементар бөлігін қарастырайық, сұйық ақпаған  $U=0$  болған кезде келесі күштер әсер етеді:

$F_1 = (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  -инерция күші,  $F_2 = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  -құбырдың серпімділік күші. Бұл жағдайда қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады.

$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (3.3)$$

Құбырда сұйықтық аққан жағдайда  $U > 0$  (17-сурет), келесі күштер пайда болады:

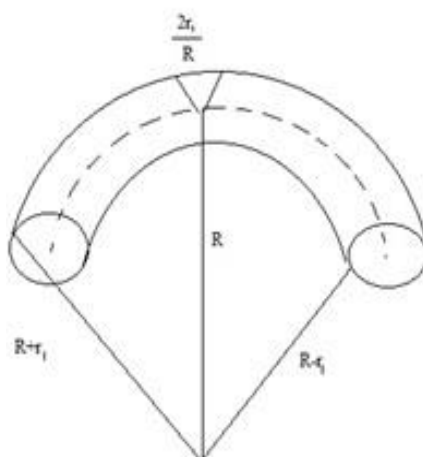


17-сурет. Сұйықтық аққан құбыр

$F_1 = (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  - инерция күші,  $F_2 = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  -құбырдың серпімділік күші.

Келесі ескеретін жағдай, құбырдың иілуінің арқасында  $F_3 = M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$  -

кориолиус күші және  $F_4 = M \cdot \frac{U^2}{R} = MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  -центірден тепкіш күш пайда болады. Құбырға әсер ететін тағы бір күшті табу үшін құбырдың иілген элементар бөлігін қарастырайық (18-сурет).



18-сурет. Құбырдың иілген бөлігі

Құбыр иілген кезде сыртқы бөлігі созылады сонымен қатар ішкі бөлігі сығылады, осы кезде сыртқы созылған артық ауданға түсетін күшті табайық. R-иілген құбырдың локалды радиусы,  $p_0$ -сындарлы ішкі қысым,  $r$  және  $r_1$ -сыртқы және ішкі көлденең қиманың радиустары. Олай болса созылған артық ауданға келесі күш әсер етеді.

$$F_5 = \int_0^\pi p_0 \frac{2r_1^2}{R} 2 \cos^2 \beta d\beta = \frac{2p_0 r_1^2}{R} \int_0^\pi (1 + \cos 2\beta) d\beta = -\frac{\pi r_1^2 p_0}{R} = \pi r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Бұл жағдайда қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады.

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

Немесе

$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi \cdot r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

Енді құбырдың шеттері топсалы бекітілгенін ескерсек, онда келесі шекаралық шарттарды жазамыз:

$$w(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad w(x, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Есептің қойылуы: құбырдың көлденең ауытқуын табу және құбырда ағып жатқан сұйықтықтың ішкі қысымы мен сындарлы жылдамдығын есептеу. Басқаша айтқанда  $w(x, t)$  – құбырдың көлденең ауытқуын және  $p_0$  – сұйықтықтың ішкі қысымын табу қажет. Ескеру:  $p_0$  – сұйықтықтың ішкі қысымын физикалық әдістермен өлшеу қиын қиынболғандықтан, Осы бөлімде ұсынып отырған  $p_0$  – сұйықтықтың ішкі қысымын табу әдісі жаңалық болып табылады.

Көлденең тербелістің екі түрлі сипаттамасы бар, ол жиілік пен амплитуда  $w(x, t) = e^{i\omega t} W(x)$ , мұндағы  $W$  – амплитуда,  $\omega$  – жиілік. Олай болса шешімді осы түрде іздейік, (3.4) теңдеуге  $w(x, t) = e^{i\omega t} W(x)$  өрнегін апарып қояйық, сонда амплитудаға қатысты келесі теңдеуге келеміз:

$$(m + M)(i\omega)^2 W(x) + EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left( \frac{dW}{dx} \right) + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (3.5)$$



(3.4) дербес туындылы теңдеуі (3.5) жәй дифференциалдық теңдеуге айналады. Жиілік  $\omega=0$  болғанда, (3.5) теңдеуі келесі түрге келеді:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (3.6)$$

Енді амплитуда үшін шекаралық шарттарды жазайық:

$$W(x)|_{x=0} = 0, \frac{d^2 W(x)}{dx^2}|_{x=0} = 0, W(x)|_{x=L} = 0, \frac{d^2 W(x)}{dx^2}|_{x=L} = 0 \quad (3.7)$$

Сұйықтың массасы  $M = \pi r_1^2 \rho_0$  формуласынан табылады. Енді

$\alpha^2 = \frac{\pi r_1^2 (p_0 + \rho_0 U^2)}{EJ}$  параметр еңгізсек,  $\frac{d^4 W}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$  теңдеуін аламыз.

Оның жалпы шешімі

$$W(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x$$

Мұндағы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – белгісіз тұрақтылар. Ендеше амплитуданың (3.7) шекаралық шарттарынан  $C_1, C_2, C_3, C_4$  - белгісіз тұрақтыларды табамыз.

Олай болса  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$  және  $\sin \alpha \cdot L = 0$ . Бұдан  $\alpha \cdot L = \pi$  немесе

$p_0 + \rho_0 U^2 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2}$  Сонымен

$$p_0 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2} - \rho_0 U^2$$

Сұйықтың ішкі қысымы осы формуламен анықталады және табылған өрнектің оң жағы теріс болмауы қажет. Сондықтан, сұйықтың сындарлы жылдамдығы  $U_{кр}$  келесі теңдіктен табылады:

$$U_{кр}^2 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2 \rho_0} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{M \cdot L^2}.$$

### Қорытынды:

1. сұйықтықтың массасы көбейген сайын сұйықтың сындарлы жылдамдығы азаяды;

2. құбырдың ұзындығы ұзарған сайын сұйықтықтың сындарлы жылдамдығы азаяды;

3. сұйықтықтың ішкі қысымы артқан сайын, сындарлы жылдамдық азаяды.

### 3.3 Иілген құбырдың сұйықтық аққан кездегі меншікті жиілігін есептеу

Қолданыстағы құбыр желілерін тексеретін инженерлер балғамен ұру немесе аққан сұйықтықтың дыбысын құлақпен есту арқылы құбырдағы ақауды анықтайды. Механикада бұл әдісті акустикалық диагностика деп атайды. Алдыңғы бөлімде құбырда ағып жатқан сұйықтықтың ішкі қысымы мен сұйықтықтың сындарлы жылдамдығын таптық. Бұл бөлімде құбырдың көлденең тербелістерінің меншікті жиіліктерін математикалық әдіспен табамыз. Мұндай математикалық есептің - тура есеп делінеді. Енді құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктерін табу есебіне көшейік. Ол үшін өткен бөлімде қорытып шығарған (3.4) қозғалыс теңдеуін жазып алайық:

$$(m + M)(i\omega)^2 w(x) + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot (i\omega)U \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Жиілік  $\omega = 0$  болғанда, (3.5) теңдеуі келесі түрге келеді:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

құбырдың шеттері топсалы бекітілгендіктен, теңдеудің шешімі төмендегі шекаралық шарттарды қанағаттандырады:

$$W(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 W(x, t)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(x, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{d^2 W(x, t)}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Сұйықтықтың жылдамдығы  $U_{кр}^2 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{M \cdot L^2}$  берілген, онда ішкі қысымды

алдыңғы бөлімде қортып шығарған  $p_0 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2} - \rho_0 U^2$  формуласынан

табылады. Бұл бөлімдегі мақсатымыз - құбырдың көлденең тербелістерінің меншікті жиіліктерін табу. Ол үшін  $W$ -амплитудасы мен  $\omega$ -жиілігіне тәуелді шаманы, яғни  $w(x, t)$ -көлденең ауытқуын іздейміз. Олай болса амплитуда мен жиілік арасындағы байланыс теңдеуін жазамыз:

$$(m + M)(i\omega)^2 W(x) + EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left( \frac{dW}{dx} \right) + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

Амплитуда келесі шекаралық шарттарды қанағаттандырады:

$$W(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(x) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Жоғарыдағы теңдеу мен шекаралық шарттарын ескере отырып, Бубнов – Галеркин әдісі бойынша базистік функцияларды келесі түрде таңдаймыз  $\left\{ \sin \frac{\pi}{L} x, \sin \frac{2\pi}{L} x, \sin \frac{3\pi}{L} x, \dots \right\}$ . Бұл гармоникалық функциялар жүйесі алдыңғы шекаралық шарттарды қанағаттандыруы керек. Олай болса,  $w(x,t)$ -көлденең ауытқуын Бубнов – Галеркин әдісі бойынша келесі қатар түрінде іздейміз.

$$W_3(x) = \sum_{s=1}^3 D_s \sin \frac{s\pi}{L} x$$

Бұл қатарды қозғалыс теңдеуіне қойғанда, ол келесі түрге келеді

$$\int_0^L \left( (m+M)(i\omega)^2 W_3(x) + EJ \frac{d^4 W_3}{dx^4} + M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left( \frac{dW_3}{dx} \right) + MU^2 \frac{d^2 W_3}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W_3}{dx^2} \right) \sin \frac{s\pi}{L} x dx = 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Осы (3.8) теңдеуден төмендегі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$(m+M)(i\omega)^2 D_1 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{L^4} D_1 \frac{L}{2} - \frac{8}{3} M \cdot U(i\omega) D_2 - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{\pi^2}{L^2} D_1 \frac{L}{2} = 0.$$

$$\begin{aligned} & (m+M)(i\omega)^2 D_2 \frac{L}{2} + EJ \cdot D_2 16 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2} - \\ & (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{4\pi^2}{L^2} D_2 \frac{L}{2} + 2MU i \omega \left( \frac{\pi}{L} D_1 \frac{4L}{3\pi} - \frac{3\pi}{L} D_3 \frac{2L}{15\pi} \right) = 0 \\ & (m+M)(i\omega)^2 D_3 \frac{L}{2} + EJ \cdot 81 \cdot \frac{\pi^4}{L^4} D_3 \cdot \frac{L}{2} \\ & - 2 \cdot M \cdot U(i\omega) \frac{2\pi}{L} D_2 \frac{6L}{5\pi} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{L^2} D_3 \frac{L}{2} = 0 \end{aligned}$$

Сонымен,  $D_1, D_2, D_3$  белгісіздеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі пайда болды:

$$\begin{cases} D_1 \left( -(m+M) \cdot \omega^2 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{2L^3} - (MU^2 + \pi r_1 p_0) \frac{\pi^2}{2L} \right) - \frac{8}{3} M \cdot U(i\omega) D_2 = 0 \\ D_2 \left( (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + 8 \cdot EJ \frac{\pi^4}{L^3} - \frac{2\pi^2}{L} \cdot (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \right) + \frac{8}{3} MU i \omega D_1 - \frac{4}{5} MU i \omega D_3 = 0 \\ D_3 \left( (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + EJ \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \cdot \frac{81}{2} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{2L} \right) - \frac{24}{5} M \cdot U(i\omega) D_2 = 0 \end{cases}$$

Ендеше, сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері келесі анықтауыштың нөлдері болып табылады.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

мұндағы

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(m+M) \cdot \omega^2 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{2L^3} - (MU^2 + \pi r_1 p_0) \frac{\pi^2}{2L}, \quad A_{12} = -\frac{8}{3} M \cdot U(i\omega), \\ A_{21} &= \frac{8}{3} MU i \omega, \quad A_{22} = (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + 8 \cdot EJ \frac{\pi^4}{L^3} - \frac{2\pi^2}{L} \cdot (MU^2 + \pi r_1^2 p_0), \quad A_{23} = -\frac{4}{5} MU i \omega, \\ A_{32} &= -\frac{24}{5} M \cdot U(i\omega), \quad A_{33} = (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + EJ \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \cdot \frac{81}{2} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{2L} \end{aligned}$$

Анықтауыштың нөлдерін Maple программалық пакеттің көмегімен табамыз. Сонымен, сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктерін таптық. Әдетте, математикалық әдістің дәлдігі инженердің тыңдауы арқылы анықтауына қарағанда жоғары болады. Келесі бөлімде құбыр ұштарының бекітілуін сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы анықтаймыз.

### 3.4 Сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтау

Әдетте құбыр ұштары көзге көрінетін ашық жерде орналаспайды. Ол су астында немесе жерге көмілген болуы мүмкін. Осыған байланысты инженерлерге сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтауда қиындықтар туындайды. Ал математикалық әдіспен сұйықтық ағып жатқан құбырдың шеттерінің бекітілуін есептеулер арқылы осы қиындықтарды айналып өтуге болады. Мұндай әдісті математикада кері есеп деп, ал механикада акустикалық диагностика деп атайды. Алдыңғы бөлімдегі есепте ізделінді шамалар бұл жағдайда белгілі деп есептейміз де, сол белгілі шамалар арқылы құбырдың шеттерінің бекіту тәсілін табамыз. Құбыр шекарасының бекітілуін бір мәнді анықтау үшін қанша жиілік керек? Егер сол жиіліктер белгілі болса, шекаралық бекітілулерді анықтауға қай жиіліктері сәйкес келеді? Енді осы сұрақтарға жауап беретін алгоритімді ұсынамыз.

Біз 3.2 бапбында құбырдың (3.4) қозғалыс теңдеуін келесі түрде жазғанбыз:

$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi \cdot r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Жүйенің алдыңғы бөлімде табылған  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$  жиіліктері, геометриялық және физикалық параметрлері белгілі болсын делік.

$$J = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad M = \pi r_1^2 \rho_0, \quad p_0 = E \left( \frac{\pi r_1}{2L} \right)^2 \cdot \left( \left( \frac{r}{r_1} \right)^4 - 1 \right)$$

бұл жерде  $J$  – құбыр қимасының инерция моменті,  $EJ$  – құбырдың қатаңдығы,  $p_0$  – ішкі сындарлы қысым,  $m$  және  $M$  – құбыр ұзындығының бірлігіне келетін құбыр мен сұйықтық массасы,  $r$  және  $r_1$  – көлденең қиманың ішкі және сыртқы радиустары  $U$  – сұйықтықтың қозғалу жылдамдығы,  $\rho$  – құбыр материалының тығыздығы,  $\rho_0$  – сұйықтық тығыздығы,  $L$  – құбыр ұзындығы.

Біздің мақсатымыз - құбырдың шекаралық бекітілуін табу. Бізге жиілік белгілі. Енді осы шамалар арқылы, кері есеп әдісін пайдаланып, шекаралық бекітілулерді табамыз.

Жоғарыдағы (3.4) теңдеуіне  $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$  шамасын қою арқылы, мына теңдеуге келеміз

$$W^{(4)} + aW'' + 2biwW' - cw^2W = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{мұндағы } a = \frac{ML^2}{EJ} \left( \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right), \quad b = \frac{2MUL^3}{EJ}, \quad c = \frac{(m+M)L^4}{EJ}.$$

Ал (3.9) теңдеуінің сызықты тәуелсіз шемшімдері мына функциялар болады.

$$W_k = W_k(x, w) = e^{\lambda_k x}, \quad k = \overline{1, 4},$$

мұндағы  $\lambda_k = \lambda_k(w)$  дегеніміз  $\lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0$  сипаттық теңдеуінің түбірлері.

$$\begin{cases} \lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0, / 4 \\ 4\lambda^3 + 2a\lambda + 2bi = 0. / \lambda \end{cases}$$

Келесідей түрлендіру жасасақ:

$$\begin{cases} 4\lambda^4 + 4a\lambda^2 + 8bi\lambda - 4c = 0, \\ 4\lambda^4 + 2a\lambda^2 + 2bi\lambda = 0. \end{cases}$$

$$2a\lambda^2 + 6bi\lambda - 4c = 0 / : 2$$

$$a\lambda^2 + 3bi\lambda - 2c = 0$$

Сонымен, егер  $\lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0$  түбірі еселі болса, онда ол келесі және тең болуы қажет :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3ib \pm \sqrt{8ac - 9b^2}}{2b}.$$

Теорема. Егер  $\lambda \neq \frac{-3ib \pm \sqrt{8ac - 9b^2}}{2b}$  және  $\lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0$ , онда  $\lambda$  – карапайым түбір. Демек  $\lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0$  төрт түбірі болады, егер  $\lambda \neq \frac{-3ib \pm \sqrt{8ac - 9b^2}}{2b}$ .

$$\begin{aligned} 8ac - 9b^2 &= 8 \frac{ML^2}{EJ} \left( \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right) \cdot \frac{(m+M)L^4}{EJ} - 9 \cdot \frac{4M^2U^2L^6}{(EJ)^2} = \\ &= L^6 \frac{8M(m+M)U^2 + 8M(m+M)\frac{p_0}{\rho_0} - 36M^2U^2}{(EJ)^2} = \\ &= \frac{L^6}{(EJ)^2} \left( 8M(m+M)\frac{p_0}{\rho_0} + 8MmU^2 - 28M^2U^2 \right) = \\ &= \frac{L^6 \cdot 4M^2}{(EJ)^2} \left( 2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{p_0}{\rho_0} + 2U^2 \frac{m}{M} - 7U^2 \right) = \\ &= \frac{L^6 \cdot 4M^2}{(EJ)^2} \left( 2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \left( 2 \frac{m}{M} - 7 \right) \right) < 0 \end{aligned}$$

Салдар.  $m$  – құбыр массасы,  $M$  – сұйықтық массасы  $\Rightarrow$  егер  $m < M$  және

$$U^2 \geq \frac{2\left(1 + \frac{m}{M}\right) \rho_0}{7 - 2\frac{m}{M}} > 0. \quad \lambda_{1,2} = \frac{-3ib \pm i \frac{L^3 2M}{EJ} \phi}{2b}, \text{ мұндағы}$$

$$\phi^2 = U^2 \left(7 - 2\frac{m}{M}\right) - 2\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{P_0}{\rho_0}.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{EJ \left\{ -3i \frac{2ML^3}{EJ} \pm i \frac{2L^3 M}{EJ} \phi \right\}}{2ML^2 \left( \frac{P_0}{\rho_0} + U^2 \right)} = \frac{2ML^3 \{-3iU \pm i\phi\}}{2ML^2 \left( \frac{P_0}{\rho_0} + U^2 \right)} = \frac{iL \{-3U \pm \phi\}}{\left( U^2 + \frac{P_0}{\rho_0} \right)} = \text{Жорамал комплекс сан,}$$

егер  $U^2 \geq \frac{2\left(1 + \frac{m}{M}\right) \rho_0}{7 - 2\frac{m}{M}} > 0$ .  $EJ$  тәуелді емес.  $E$  – құбыр материялы,  $J$  – құбыр

қимасының формасы.

Құбырдың еркін тербелісінің спектралды есебін қою үшін шектік шарттарын беру керек. Құбырдың иілу тербелістерін қарастырылып жатқандықтан, онда оған сәйкес есептің шектік шарттары сырықтың еркін иілу шарттарына ұқсас болады. Жалпы жағдайда, бекітілудің қадалған ұш (заделка, қатаң бекітіліс), еркін тірек, еркін ұш, қалқымалы қыстырғыш, серпімді сияқты түрлерін ескеретін шектік шарттар келесі жазылады [54,55]:

$$\begin{aligned} U_1(W) &\equiv a_1 W(0) + a_4 W'''(0) = 0, \\ U_2(W) &\equiv a_2 W'(0) + a_3 W''(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} U_3(W) &\equiv b_1 W(1) + b_4 W'''(1) = 0, \\ U_4(W) &\equiv b_2 W'(1) + b_3 W''(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сипаттық анықтауышты нөлге теңестіру шартынан жиіліктер теңдеуін аламыз [56]

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & U_1(X_2) & U_1(X_3) & U_1(X_4) \\ U_2(X_1) & U_2(X_2) & U_2(X_3) & U_2(X_4) \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Сипаттық анықтауыштың түбірлерін жуықтап шешудің кейбір әдістері [63] жұмысында келтірілген.

Кері есепті қарастыралық.

$U_1(W_k)$  және  $U_2(W_k)$  формаларының  $a_j$  коэффициенттерінен құралған матрицаны  $A$  әрпімен, ал  $U_3(W_k)$  және  $U_4(W_k)$  формаларының  $b_j$  коэффициенттерінен құралған матрицаны  $B$  әрпімен белгілейміз.

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

$A$  және  $B$  матрицаларының  $i$ -ші және  $j$ -ші бағандарынан құралған екінші ретті минорларды қысқаша  $A_{ij}$  және  $B_{ij}$  деп белгілейміз.

Біздің мақсатымыз барлық  $a_j$  және  $b_j$  коэффициенттерінің дәл анықталуы емес. Мақсат – шектік шарттарды іздеу, бұл

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_1, 0, 0, a_4)^T, & a_2 &= (0, a_2, a_3, 0)^T, \\ b_1 &= (b_1, 0, 0, b_4)^T, & b_2 &= (0, b_2, b_3, 0)^T. \end{aligned}$$

векторларында құрылған  $\langle a_1, a_2 \rangle$  және  $\langle b_1, b_2 \rangle$  сызықты қабықшаларын табу деген сөз. Сондықтан (3.9)-(3.11) есептер тура есепті, ал (3.10)-(3.11) шектік шарттарын қалпына келтіру кері есепті білдіреді.

Кері есеп. (3.9)-(3.11) есебіндегі  $U_i(W_m)$  формаларының ( $i, j, m = \overline{1,4}$ )  $a_j$  және  $b_j$  коэффициенттері белгісіз. Осы коэффициенттерден құрылған  $A$  және  $B$  матрицаларының рангтері екіге тең. (3.9)-(3.11) есебінің  $w_k$  меншікті мәндері белгілі. Енді  $\langle a_1, a_2 \rangle$  және  $\langle b_1, b_2 \rangle$  сызықты қабықшаларын қалпына келтіру қажет.

Төменде  $w_j$ - меншікті мәні нақты, яғни  $w_j$  меншікті мәндері меншікті жиіліктермен сәйкесіп қалады деп санаймыз. Егер,  $w_j$  нақты болмаса, шектік шарттарды іздеу кезінде құбыр тербелісінің меншікті жиіліктерінен бөлек демпфрлеу коэффициенттері белгілі болады (яғни, меншікті мәндердің жорамал бөліктері)[55, с.91,93].

Кері есептің шешімін іздеу үшін келесі белгілеулерді енгіземіз.  $A$ ,  $B$  және екі нөлдік матрицалардан құралған матрицаны  $C$  арқылы белгілейміз:

$$C = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \quad (3.14)$$



$C$  матрицасының элементтерін  $c_{ij}$  арқылы, ал  $k_1, k_2, k_3, k_4$  нөмердегі бағандардан құралған минорларды

$$M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} c_1 k_1 & c_1 k_2 & c_1 k_3 & c_1 k_4 \\ c_2 k_1 & c_2 k_2 & c_2 k_3 & c_2 k_4 \\ c_3 k_1 & c_3 k_2 & c_3 k_3 & c_3 k_4 \\ c_4 k_1 & c_4 k_2 & c_4 k_3 & c_4 k_4 \end{vmatrix},$$

(3.10) мен (3.11) шектік шарттарындағы белгілеулер мына түрде жазылады

$$U_i(W_m) = \sum_{j=1}^4 [c_{ij} W_m^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j} W_m^{(j-1)}(1)], \quad i = \overline{1,4} \quad (3.15)$$

жаңа белгілеулердегі кері есеп келесі түрде болады: (3.9), (3.15) есептерінің  $c_{ij}$  коэффициенттері белгісіз; осы коэффициенттерден құралған  $C$  матрицасының рангісі 4 ке тең.  $A, B$  матрицаларынан құралған  $C$  матрицасының  $A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23}$  минорлары нөлге тең. (3.9), (3.15) есептерінің  $w_k$  меншікті мәндері белгілі. Сондағы  $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}, c_{i8})^T$  ( $i = \overline{1,4}$ ) векторларында құрылған  $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$  сызықты қабықшаны қалпына келтіру қажет. Бұл  $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$  сызықты қабықшаны іздеу - сызықты эквиваленттілік дәлдігіне дейінгі  $C$  матрицасын іздеумен бірдей.

Қойылған кері есебіміздің бір немесе екі шешімі бар екенін көрсетейік. Ол үшін (3.15) формаларынан бөлек келесі сызықты біртекті формаларды қарастырайық:

$$\tilde{U}_i(W_m) = \sum_{j=1}^4 [\tilde{c}_{ij} W_m^{(j-1)}(0) + \tilde{c}_{i,4+j} W_m^{(j-1)}(1)], \quad i = \overline{1,4} \quad (3.16)$$

$\tilde{c}_{ij}$  коэффициенттерінен құралған матрицаны  $\tilde{C}$  арқылы, ал оның минорларын -  $\tilde{M}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ , екінші ретті минорларын -  $\tilde{A}_{k_1 k_2}, \tilde{B}_{k_3 k_4 - 4k_4 - 4}$  арқылы белгілейміз.

Сондай-ақ келесі векторларды енгіземіз:

$$\begin{aligned} c_i^+ &= (\tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{c}_{i3}, \tilde{c}_{i4}, \tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, \tilde{c}_{i7}, \tilde{c}_{i8})^T, \\ c_i^- &= (\tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, -\tilde{c}_{i7}, -\tilde{c}_{i8}, \tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, -\tilde{c}_{i3}, -\tilde{c}_{i4})^T, \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. (кері есептің шешімінің жалғыздығы немесе түйіндістігі).  $rank C = rank \tilde{C} = 4$  болсын. Онда (3.9), (3.15) есептерінің  $\{w_k\}$  меншікті мәні

және (3.9), (3.16) есептерінің  $\{\tilde{w}_k\}$  меншікті мәндерінің еселіктеріне сәйкесіп отырады, яғни  $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+ \rangle$  немесе  $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^-, c_2^-, c_3^-, c_4^- \rangle$ .  
Дәлелі. (3.12) анықтауышын келесі түрде жазайық

$\Delta(w) = \det(C \cdot D)$ , мұндағы

$$D = \begin{vmatrix} w_1(0) & w_2(0) & w_3(0) & w_4(0) \\ w_1'(0) & w_2'(0) & w_3'(0) & w_4'(0) \\ w_1''(0) & w_2''(0) & w_3''(0) & w_4''(0) \\ w_1'''(0) & w_2'''(0) & w_3'''(0) & w_4'''(0) \\ w_1(1) & w_2(1) & w_3(1) & w_4(1) \\ w_1'(1) & w_2'(1) & w_3'(1) & w_4'(1) \\ w_1''(1) & w_2''(1) & w_3''(1) & w_4''(1) \\ w_1'''(1) & w_2'''(1) & w_3'''(1) & w_4'''(1) \end{vmatrix}$$

Бине-Коши формуласынан алатынымыз [57, 39 б.]

$$\Delta(w_k) = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4} \quad (3.17)$$

мұндағы  $f_{k_1 k_2 k_3 k_4} - k_1, k_2, k_3, k_4$  нөмердегі бағандардан құралған  $D$  матрицасының төртінші ретті минорлары.

$k_3, k_4 \leq 4, k_1, k_2 \geq 5$ , кезінде  $M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0$  болғандықтан анықтауышты есептеу үшін Лаплас теоремасын қолданып, және  $\Delta(w_k) = 0$  екенін ескеріп, алатынымыз

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4} (w_k) = 0. \quad (3.18)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= A_{k_1, k_2} B_{k_3 - 4, k_4 - 4} \\ (A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = 0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Сызықты дифференциалдық операторлардың жалпы теориясының қасиеттерінен  $\Delta(w)$  функциясы 1/2 ретті бүтін функция болып табылады [58].

Бұдан шығатыны, (3.9), (3.15) және (3.9), (3.16) есептерінің сәйкесінше  $\Delta(w)$  және  $\tilde{\Delta}(w)$  сипаттық анықтауыштары мына қатынаспен байланысты

$$\Delta(w) \equiv K \tilde{\Delta}(w), \quad (3.20)$$

мұндағы  $K$  – нөлден өзгеше константа. (3.17) және (3.20) шығатыны

$$\begin{aligned}
 & \left[ M_{1256} - K\tilde{M}_{1256} \right] f_{1256} + \left[ M_{1257} - K\tilde{M}_{1257} \right] f_{1257} + \left[ M_{1268} - K\tilde{M}_{1268} \right] f_{1268} + \\
 & + \left[ M_{1256} - K\tilde{M}_{1268} \right] f_{1268} + \left[ M_{1278} - K\tilde{M}_{1278} \right] f_{1278} + \left[ M_{1356} - K\tilde{M}_{1356} \right] f_{1356} + \\
 & + \left[ M_{1357} - K\tilde{M}_{1357} \right] f_{1357} + \left[ M_{1368} - K\tilde{M}_{1368} \right] f_{1368} + \left[ M_{1378} - K\tilde{M}_{1378} \right] f_{1378} + \\
 & + \left[ M_{2456} - K\tilde{M}_{2456} \right] f_{2456} + \left[ M_{2457} - K\tilde{M}_{2457} \right] f_{2457} + \left[ M_{2468} - K\tilde{M}_{2468} \right] f_{2468} + \\
 & + \left[ M_{2478} - K\tilde{M}_{2478} \right] f_{2478} + \left[ M_{3456} - K\tilde{M}_{3456} \right] f_{3456} + \left[ M_{3457} - K\tilde{M}_{3457} \right] f_{3457} + \\
 & + \left[ M_{3468} - K\tilde{M}_{3468} \right] f_{3468} + \left[ M_{3478} - K\tilde{M}_{3478} \right] f_{3478} \equiv 0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Соңғы теңдіктің оң жақ бөліктері (осы  $f_{1356} = -f_{1257}$  мүшесінен басқасы) сызықты тәуелсіз мүшені құрайды. Егер (3.9) теңдеуіндегі  $b = 0$  болса, онда осы  $f_{1356} = -f_{1257}$  теңдіктен басқа келесі теңдіктерді аламыз:  $f_{1257} = -f_{1356}$ ,  $f_{1268} = -f_{2456}$ ,  $f_{1278} = f_{3456}$ ,  $f_{1368} = f_{2457}$ ,  $f_{1378} = -f_{3457}$ ,  $f_{2478} = -f_{3468}$ . Бұл жағдайда сызықты тәуелсіз функциялар жүйесін тек мына функциялар құрайды

$$f_{1256}(w_m), f_{1257}(w_m), f_{1268}(w), f_{1278}(w), f_{1357}(w), f_{1368}(w), f_{1378}(w), f_{2468}(w), f_{2478}(w), f_{3478}(w).$$

Бұдан кері есептің шешімінің жалғыздығы немесе түйіндестігі шығады. Ал  $b = 0$  жағдайында меншікті жиіліктер бойынша құбырдың бекітілуін анықтау есебінің шешімі әр қашан түйіндес бола бермейді.  $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^-, c_2^-, c_3^-, c_4^- \rangle$  кезінде (мысалы, қадалған ұш-қадалған ұш жағдайында) кері есептің жалғыз шешімін аламыз. Осылайша, кері есептің жалғыз немесе түйіндес шешімі болады. Теорема дәлелденді.

Құбырдың иіліу тербелістерінің меншікті жиіліктері бойынша белгісіз шектің шарттарын іздеу есебінің шешімі жалғыз немесе екеу болатынын көрсеттік.

Сұйықтығы бар құбырдың шеттік бекітілулерін меншікті жиіліктері арқылы табуды екі жағдайға бөліп қарастырайық. Бірінші сұйықтық ақпаған  $U = 0$  – жағдайды қарастырайық. (3.9) теңдеуіндегі  $b = 0$  болсын және  $\{\omega_k\}$  – құбырдың иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері. Бұл жағдайда  $\{\omega_k\}$  төмендегі жиіліктік теңдеуді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned}
 \Delta(w_k) = & (M_{1257} - M_{1356})f_{1257}(w_k) + M_{1268}f_{1268}(w_k) + M_{2456}f_{2456}(w_k) + M_{1368}f_{1378}(w_k) + \\
 & + M_{2457}f_{2457}(w_k) + M_{1278}f_{1278}(w_k) + M_{3456}f_{3456}(w_k) + M_{1378}f_{1378}(w_k) + M_{3457}f_{3457}(w_k) + \\
 & + M_{2478}f_{2478}(w_k) + M_{3468}f_{3478}(w_k) + M_{1357}f_{1357}(w_k) + M_{2468}f_{2468}(w_k) + M_{1256}f_{1256}(w_k) + \\
 & + M_{3478}f_{3478}(w_k) = 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$\{\omega_k\}$  – (3.9), (3.14) есептеріндегі тек тоғыз меншікті жиіліктер болса, онда (3.22) теңдеуі 10 белгісізге  $x_1, x_2, \dots, x_n$  қатысты 9 сызықты алгебралық теңдеулерден тұратын жүйені құрайды:

$$\Delta(w_k) = x_1 f_{1257}(w_k) + x_2 f_{1268}(w_k) + x_3 f_{1368}(w_k) + x_4 f_{1278}(w_k) + x_5 f_{1378}(w_k) + x_6 f_{2478}(w_k) + x_7 f_{1357}(w_k) + x_8 f_{2468}(w_k) + x_9 f_{1256}(w_k) + x_{10} f_{3478}(w_k) = 0 \quad (3.23)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x_1 &= M_{1257} - M_{1356} (f_{1257} = -f_{1356}), & x_5 &= M_{1378} - M_{3457} (f_{1378} = -f_{3457}), \\ x_2 &= M_{1268} - M_{2456} (f_{1268} = -f_{2456}), & x_6 &= M_{2478} - M_{3468} (f_{2478} = -f_{3468}), \\ x_3 &= M_{1368} - M_{2457} (f_{1368} = f_{2457}), & x_4 &= M_{1278} - M_{3456} (f_{1278} = f_{3456}), \\ x_7 &= M_{1357}, & x_8 &= M_{2468}, & x_9 &= M_{1256}, & x_{10} &= M_{3478} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Егер  $\text{rank} \|f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(w_k)\|_{10 \times 9} = 9$  болса, онда (3.23) алгебралық теңдеулер жүйесі  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  тұрақты көбейткіштеріне дейінгі дәлдікте жалғыз шешімі болады.  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  мәндері бойынша (эквиваленттік дәлдікке дейінгі) бір немесе екі  $C$  матрицасы табылады. Бұл қалай болатынын нақты мысалда көрсетейік.

**Мысал-1** (еркін тірек-қадалған ұш). Дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$W^{(4)}(x) + W''(x) - w^2 W(x) = 0 \quad (b = 0). \quad (3.25)$$

(3.25), (3.10), (3.11) есептерінің  $w_k$  тоғыз меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$w_1 = 14,65, \quad w_2 = 49,10, \quad w_3 = 103,34, \quad w_4 = 177,34, \quad w_5 = 271,09, \quad w_6 = 384,58, \quad w_7 = 670,79, \\ w_8 = 843,50, \quad w_9 = 1035,96.$$

Осыларға сәйкес болатын шектік шарттарды қанағаттандырайық. Maple программалық пакетінің көмегімен (3.23) жүйесінің шешімін аламыз:

$x_1 = K; \quad x_i = 0, \quad i = \overline{2,10}$ . Бұдан ары қарай  $K = \text{const} \neq 0$ .  $x_1 = M_{1257} - M_{1356} = K$  теңдігінен

$M_{1257} \neq 0$  немес  $M_{1356} \neq 0$  ( $A$  және  $B$  матрицаларының рангтері нөлге тең болып қалатын еді, бұл ранг екіге тең болады дегенге қарама-қайшы келеді). Келесі жағдайларға сәйкес келетін  $C$  матрицасын табайық.

1.  $M_{1257} \neq 0$  болсын. Онда  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$ . Бұдан  $C$  матрицасының түрі келесідей болады (сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$M_{1357} = 0$ ,  $M_{1356} = 0$  теңдіктерінен  $a_3 = 0$ ,  $b_2 = 0$  болады, ал  $x_3 = M_{1368} + M_{2457} = 0$ ,  $x_4 = M_{1278} + M_{3456} = 0$  теңдіктерінен  $a_4 = 0$ ,  $b_4 = 0$  болатынын аламыз. Бұдан  $C$  матрицасының түрі төмендегідей болады

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.  $M_{1356} \neq 0$  болсын. Дәл сол жағдаймен  $C$  матрицасының түрі келесідей болады

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Осылайша, теоремамен толық сәйкестікте (қадалған үш-еркін тіреу) және (еркін тіреу-қадалған үш) жағдайларына сай екі шешімін аламыз:

$$\begin{aligned} W(0) = 0, W'(0) = 0, W(1) = 0, W''(1) = 0; \\ W(0) = 0, W''(0) = 0, W(1) = 0, W'(1) = 0. \end{aligned}$$

**Мысал-2**(серпімді бекітілу). 1-ші мысалдағыдай дифференциалдық теңдеуді (3.25) қарастырайық. (3.25), (3.10), (3.11) есептерінің  $\omega_k$  тоғыз меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$w_1 = 21,67, w_2 = 60,87, w_3 = 120,06, w_4 = 198,98, w_5 = 297,66, w_6 = 416,08, w_7 = 712,15, w_8 = 889,79, w_9 = 1087,18.$$

Maple программалық пакетінің көмегімен (3.23) жүйесінің рангі 9 ға тең, ал оның шешімі:

$$x_5 = -3K, x_7 = K, x_{10} = -2K; \text{ қалған } x_i = 0 \quad (3.26).$$

$x_7 = M_{1257} \neq 0$  теңдігінен  $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$  аламыз. Бұдан  $C$  матрицасының түрі келесідей болады (сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (K = 1).$$

Бұдан, (3.24) және (3.26) теңдіктерінен

$M_{1357} = 0$ ,  $M_{1356} = 0$  теңдіктерінен  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $a_4 - b_4 = -3$ ,  $a_4 b_4 = -2$ . Бұдан  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $a_4 = -1$ ,  $b_4 = 2$  немесе  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $a_4 = -2$ ,  $b_4 = 1$  болады. Осылайша,  $C$  матрицасының түрі төмендегідей болады (сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{немесе} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осыдан шектік шарттар келесідей болады:

$$\begin{aligned} W(0) - W'''(0) &= 0, & W''(0) &= 0, \\ W(1) + 2W'''(1) &= 0, & W''(1) &= 0, \end{aligned}$$

Немесе

$$\begin{aligned} W(0) - 2W'''(0) &= 0, & W''(0) &= 0, \\ W(1) + W'''(1) &= 0, & W''(1) &= 0. \end{aligned}$$

Екінші құбырдағы сұйықтың ағып жатқан  $U \neq 0$  – жағдайды қарастырайық.  $b \neq 0$  болсын және  $\{\omega_k\}$  – құбырдың иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері. Бұл жағдайда  $\{\omega_k\}$  төмендегі (3.22) жиіліктік теңдеуді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \Delta(w_k) &= (M_{1257} - M_{1356})f_{1257}(w_k) + M_{1268}f_{1268}(w_k) + M_{2456}f_{2456}(w_k) + M_{1368}f_{1378}(w_k) + \\ &+ M_{2457}f_{2457}(w_k) + M_{1278}f_{1278}(w_k) + M_{3456}f_{3456}(w_k) + M_{1378}f_{1378}(w_k) + M_{3457}f_{3457}(w_k) + \\ &+ M_{2478}f_{2478}(w_k) + M_{3468}f_{3478}(w_k) + M_{1357}f_{1357}(w_k) + M_{2468}f_{2468}(w_k) + M_{1256}f_{1256}(w_k) + \\ &+ M_{3478}f_{3478}(w_k) = 0 \end{aligned}$$

$\{w_k\}$  – (3.9), (3.14) есептеріндегі 14 меншікті жиіліктер болса, онда (3.22) теңдеуі 15 белгісіз  $x_1, x_2, \dots, x_n$  қатысты 14 сызықты алгебралық теңдеулерден тұратын жүйені құрайды:

Егер  $\text{rank} \|f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(w_k)\|_{15 \times 14} = 14$  болса, онда сәйкес  $C$  матрицасының түріне қарай, осы матрицаны іздеуде бір немесе екі шешім табылады.

**Мысал-3** (еркін тірек-қадалған үш). Дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$W^{(4)}(x) + W''(x) - 2iw^2 W(x) - w^2 W(x) = 0 \quad (b \neq 0). \quad (3.27)$$

(3.27), (3.10), (3.11) есептерінің  $w_k$  14 меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$w_1 = 14,92, \quad w_2 = 49,61, \quad w_3 = 103,92, \quad w_4 = 177,96, \quad w_5 = 271,73, \quad w_6 = 385,24, \quad w_7 = 671,47, \\ w_8 = 844,19, \quad w_9 = 1036,65, \quad w_{10} = 1248,85, \quad w_{11} = 1480,79, \quad w_{12} = 1732,46, \quad w_{13} = 2003,88, \\ w_{14} = 2295,03.$$

Шектік шарттарын табайық. (3.22)-ден  $M_{1257} - M_{1356} = K$  болатындай, ал қалған сол жақ 13 белгісіз көбейткіштері нөлге тең. Бұдан бірінші мысалдағыдай (қадалған үш-еркін тіреу) және (еркін тіреу-қадалған үш) жағдайларында екі шешім аламыз

$$W(0) = 0, W'(0) = 0, W(1) = 0, W''(1) = 0; \\ W(0) = 0, W''(0) = 0, W(1) = 0, W'(1) = 0.$$

**Мысал-4**(серпимді бекітілу).3-ші мысалдағыдай (3.27) тендеуін қарастырамыз. (3.27), (3.10), (3.11) есептерінің  $\omega_k$  14 меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$w_1 = 21,81, \quad w_2 = 61,32, \quad w_3 = 120,58, \quad w_4 = 199,56, \quad w_5 = 298,27, \quad w_6 = 416,71, \quad w_7 = 712,81, \\ w_8 = 890,46, \quad w_9 = 1087,86, \quad w_{10} = 1304,99, \quad w_{11} = 1541,86, \quad w_{12} = 1798,47, \quad w_{13} = 2074,82, \\ w_{14} = 2370,91.$$

Шектік шарттарын анықтайық. Maple программалық пакетінің көмегімен (3.22) жүйесінің рангі 14 ға тең, ал оның шешімі:

$$M_{1357} = K, \quad M_{3457} = K, \quad M_{1378} = -2K, \\ M_{3478} = -2K, \quad M_{3457} - M_{1356} = 0.$$

қалған  $M_{ijkl}$  нөлге тең.  $M_{1357} \neq 0$  теңдігінен  $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$  аламыз. Бұдан шектік шарттарын жалғыз түрін аламыз:

$$W(0) - W'''(0) = 0, \quad W''(0) = 0, \\ W(1) + 2W'''(1) = 0, \quad W''(1) = 0,$$

Бұл бөлімде құбыр шекарасының бекітілуін бір мәнді анықтау үшін тоғыз меншікті жиілік керек екеніне көз жеткіздік. Егер сол жиіліктер белгілі болса, шекаралық бекітілуін анықтау алгоритімін ұсындық.

### 3.5 Меншікті жиіліктердің минимал мөлшерін қолдана отырып құбырдың бекітілуін идентификациялау

Сұйықтығы бар құбырдың тербелісі қарастырылалық. Алдыңғы тарауларда сұйықтық құбыр бойымен ақпайтын болса, онда құбырдың иілу тербелісінің барлық меншікті жиіліктері бойынша құбырдың бекітілуі оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірмәнді анықталатыны көрсетілді. Шеттік шарттар идентификациясы есебі де тоғыз меншікті

жиіліктер бойынша шешілген болатын. Бұл бапта құбырдың шеттік шарттарын оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді қалпына келтірудегі меншікті мәндер, беске дейін қысқартылған. Бұрындары 9-теңдеуден тұратын сызықты жүйені шешу арқылы спектральді мәліметтер азайтылатын болса, мұнда канондық түрге келтірілген шеттік шарттардағы төрт белгісіз коэффициенттерге қатысты бес сызықты емес теңдеулер жүйесі шешіледі де, осы кері есепті шешудің мысалдары келтірілді. Идентификация үшін меншікті мәндердің кіші саны жеткіліксіз екендігі жайлы контрмысалдар да көрсетілді. Бірінші контрмысалда, құбырдың бекітілуін идентификациялау үшін төрт нөлдік емес меншікті жиіліктердің өзі де жеткіліксіз болатыны көрсетілді. Екінші контрмысалда, дербес жағдайда нөл меншікті мән бола ала ма деген мәселе туралы айтылды.

Сұйықтығы бар құбырлардың тербелісін, құбырлар мен сырықтар тербелісінің меншікті жиіліктерін анықтауға [59]-[66] жұмыстары арналған. Сол сияқты [67]-[74] жұмыстарында шеттік шарттардың параметрлерін анықтау және сырықтардың, құбырлардың және басқада механикалық үлестірілген жүйелердің түйіндесу шарттары есебі шешілді. Жалпы, соның ішінде, [73] жұмысында екі меншікті мән арқылы құбырдың серпімді емес бекітілуі, [74] жұмысында он төрт меншікті жиіліктер арқылы сұйықтығы бар құбырдың бекітілуі анықталынды. Ал [71,72] жұмыстарында барлық меншік жиіліктер (соның ішінде нөлдік меншікті мән) арқылы құбырдың бекітілуі (сұйықтық ақпаған жағдайда) оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді анықталатыны көрсетілді. Сондай-ақ, бұндай идентификацияға тоғыз меншікті жиіліктердің жеткілікті екендігі көрсетілді. [73] жұмыста құбырдың 16 серпімді емес бекітілуінің біреуін ((қадалған ұш)-(қадалған ұш), (қадалған ұш)-(еркін тірек), (қадалған ұш)-(қалқымалы қадалған ұш), (қадалған ұш)-(еркін ұш), (еркін тірек)-( қадалған ұш), (еркін тірек)-(еркін тірек), (еркін тірек)-(қалқымалы қадалған ұш), (еркін тірек)-(еркін ұш), (қалқымалықадалған ұш)-( қадалған ұш), (қалқымалы қадалған ұш)-(еркін тірек), (қалқымалы қадалған ұш)-( қалқымалы қадалған ұш), (қалқымалы қадалған ұш)-(еркін ұш), (еркін ұш)-( қадалған ұш), (еркін ұш)-(еркін тірек), (еркін ұш)-( қалқымалы қадалған ұш),(еркін ұш)-(еркін ұш)) оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін анықтауда нөлдік мәні меншікті бола ала ма деген мәлімет жеткілікті. Бұл жұмыста құбырдың бекітілуінің идентификациясы үшін бес меншікті жиіліктің жеткілікті, ал төрт меншікті мән жеткіліксіз екендігі көрсетілді.

### **Тура есеп**

Сұйықтығы бар құбырдың (сұйықтық қозғалмайды) иілу тербелістерінің меншікті жиіліктерін, оның ұштарындағы бекітілу түрін (шеттік шарттарын) және механикалық жүйенің физикалық параметрлерін (құбырды бекітетін серіппенің қатаңдық коэффициенті; құбырдың массасы, тығыздығы ұзындығы, ішкі және сыртқы радиустары; құбырдың қарастырылып отырған бөлігінің ішкі көлемін толық қамтитын сұйықтықтың массасы мен тығыздығы) анықталық.



Ағынды сұйықтығы бар құбырдың еркін шағын тербелісінің теңдеуі келесі түрде жазылады

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (m + M) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial t} + U \left( \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \quad (3.28)$$

мұнда

$$J = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad M = \pi r_1^2 \rho_0, \quad p_0 = E \left( \frac{\pi r_1}{2L} \right)^2 \cdot \left( \left( \frac{r}{r_1} \right)^4 - 1 \right)$$

бұл жерде  $J$  – құбырлық қиманың инерция моменті,  $EJ$  – құбырдың қатаңдығы,  $p_0$  – ішкі сындарлы қысым,  $m$  және  $M$  – құбыр ұзындығының бірлігіне келетін құбыр мен сұйықтық массасы,  $r$  және  $r_1$  – көлденең қиманың ішкі және сыртқы радиусы,  $U$  – сұйықтықтың қозғалу жылдамдығы,  $\rho$  – құбыр материалының тығыздығы,  $\rho_0$  – сұйықтық тығыздығы,  $L$  – құбыр ұзындығы.

$x = X/L$ ,  $w = W/L$ , белгілеулерін енгізіп, (3.28) теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(m + M)L^4}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2MUL^3}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{ML^2}{EJ} \left( \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$  қою арқылы, мына теңдеуге келеміз

$$W^{(4)} + aW'' + 2biwW' - cw^2W = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{Мұнда } a = \frac{ML^2}{EJ} \left( \frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right), \quad b = \frac{2MUL^3}{EJ}, \quad c = \frac{(m + M)L^4}{EJ}$$

$x$  және  $w$  белгілеулерін енгізу арқылы мына айнымалыларды өлшемсіз түрге келтіреміз

$$a : \frac{\kappa \mathcal{L}}{m} \cdot \frac{m^2}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa \mathcal{L}} \cdot \frac{1}{m^4} \cdot \frac{m^2}{c^2} = 1, \quad w \cdot b : \frac{1}{c} \left( \frac{\kappa \mathcal{L}}{m} \cdot \frac{m}{c} \cdot \frac{m^3}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa \mathcal{L}} \cdot \frac{1}{m^4} \right) = 1,$$

$$w^2 \cdot b : \frac{1}{c^2} \left( \frac{\kappa \mathcal{L}}{m} \cdot \frac{m^4}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa \mathcal{L}} \cdot \frac{1}{m^4} \right) = 1$$

Сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайды қарастырып жатқандықтан, (3.29) теңдеу қысқартылып келесі түрде:

$$W^{(4)} + aW'' - cw^2W = 0 \quad (3.30)$$

Жалпы түрдегі шеттік шарттар (Штурм типіндегі шарттар [75, с. 70]):

$$\begin{aligned} U_1(W) &\equiv -a_1 W(0) + a_4 W'''(0) = 0, \quad U_3(W) \equiv b_1 W(1) + b_4 W'''(1) = 0 \\ U_2(W) &\equiv -a_1 W'(0) + a_3 W''(0) = 0, \quad U_4(W) \equiv b_2 W'(1) + b_3 W''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

мұнда  $|a_1| + |a_4| \neq 0$ ,  $|a_2| + |a_3| \neq 0$ ,  $|b_1| + |b_4| \neq 0$ ,  $|b_2| + |b_3| \neq 0$

$U_1(W_k)$  және  $U_2(W_k)$  формаларының  $a_j$  коэффициенттерінен құралған матрицаны  $A$  әрпімен, ал  $U_3(W_k)$  және  $U_4(W_k)$  формаларының  $b_j$  коэффициенттерінен құралған матрицаны  $B$  әрпімен белгілейміз.

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.32)$$

Біздің қарастырылып отырған мысалымызда спектр қарапайым төрт меншікті мәннен тұратынын байқаймыз. Алғашқы меншікті мәндер үшін  $\lambda = \lambda_k$  кезінде  $\frac{\partial \Delta(\lambda)}{\lambda} \neq 0$  теңсіздігі арқылы тексерілген, ал келесі меншікті жиіліктер үшін 2 теоремадан [75, с. 74-75], яғни Штурм – Лиувилл шарты бойынша шеттік есебінің спектрі қандай да бір мәннен бастап қарапайым меншікті мәндерден тұрады.

Тура есептің шешімін (қадалған үш)-(еркін үш) жағдайындағы мысалда көрсетейік, шеттік шарттардағы коэффициенттері  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 1$ ,  $b_4 = 1$ :

$$\begin{aligned} U_1(W) &\equiv W(0) = 0, \quad U_3(W) \equiv W'''(1) = 0 \\ U_2(W) &\equiv W'(0) = 0, \quad U_4(W) \equiv W''(1) = 0 \end{aligned}$$

$a$  және  $c$  коэффициенттерін 1 ге тең деп алып, бұл есеп үшін сипаттық теңдеу сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайда ( $U = 0$ ) келесі түрде:

$$W^{(4)} + W'' - w^2 W = 0 \quad (3.33)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  және  $\lambda_4$  – (3.33) теңдеудің түбірлері:

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4w^2}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 + 4w^2}}{2}} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} W_1(x) &= -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \\ W_2(x) &= -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \\ W_3(x) &= \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \end{aligned}$$

$$W_4(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1} e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} e^{\lambda_2 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1} e^{-\lambda_1 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} e^{-\lambda_2 x}$$

Функциялары мына шартты қанағаттандыратын (3.33) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері

$$W_j^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq r \\ 1, & j = r \end{cases} \quad j, r = 1.2.3.4$$

(3.33) теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде беріледі

$$W(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x) + C_3 W_3(x) + C_4 W_4(x)$$

Жиіліктер теңдеуін сипаттық анықтауышты нөлге теңестіру шартынан алады

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} U_1(w_1) & U_1(w_2) & U_1(w_3) & U_1(w_4) \\ U_2(w_1) & U_2(w_2) & U_2(w_3) & U_2(w_4) \\ U_3(w_1) & U_3(w_2) & U_3(w_3) & U_3(w_4) \\ U_4(w_1) & U_4(w_2) & U_4(w_3) & U_4(w_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ U_3(w_1) & U_3(w_2) & U_3(w_3) & U_3(w_4) \\ U_4(w_1) & U_4(w_2) & U_4(w_3) & U_4(w_4) \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Компьютердегі есептеулер келесі нәтижелерді берді:  $w_1 = 3.641309$ ,  $w_2 = 21.72958$ ,  $w_3 = 61.32403$ ,  $w_4 = 120.4921$ ,  $w_5 = 199.4298$ ,  $w_6 = 298.1131$ ,  $w_7 = 416.5395$ ,  $w_8 = 554.7075$ ,  $w_9 = 712.6162$ .

Сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайда меншікті жиіліктерде комплекс бөлігі (жорамал) болмайтынын байқаймыз.

Кері есеп

меншікті  $w_k$  жиіліктері белгілі.  $A$  және  $B$  (3.32) матрицаларының рангтері екіге тең.  $a_j$  және  $b_j$  шеттік шарттар коэффициенттерін қалпына келтіру қажет, яғни бекітілудің түрін анықтау керек.

Бұрынырақ [71,72] жұмыстарында шеттік шарттар орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді анықталатыны және ол үшін тоғыз меншікті жиілік қолданылған болатын. Бұл жұмыста сұйықтығы қозғалмайтын құбырдың бекітілуін бес меншікті жиілік арқылы бірімәнді анықтауға болатынын көрсетеміз.

$A$ ,  $B$  және екі нөлдік матрицалардан құралған матрицаны  $C$  арқылы белгілейміз:

$$C = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$C$  матрицасының элементтерін  $c_{ij}$  арқылы, ал  $k_1, k_2, k_3, k_4$  нөмердегі бағандардан құралған минорларын былай жазамыз

$$M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} c_1 k_1 & c_1 k_2 & c_1 k_3 & c_1 k_4 \\ c_2 k_1 & c_2 k_2 & c_2 k_3 & c_2 k_4 \\ c_3 k_1 & c_3 k_2 & c_3 k_3 & c_3 k_4 \\ c_4 k_1 & c_4 k_2 & c_4 k_3 & c_4 k_4 \end{vmatrix},$$

мысалы  $M_{1256} = (-a_1) \cdot (-a_2) \cdot b_1 \cdot b_2$ .

Жоғарыдағы (3.31) шеттік шарттар идентификациясы есебі жолдарының сызықты түрлену дәлдігіне дейінгі  $C$  матрицасының идентификация есебіне келтіріледі.

Ал (3.35) сипаттық анықтауышын басқа түрде жазылады:  $\Delta(w) = \det(C \cdot D)$ , мұндағы

$$D = \begin{vmatrix} W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) & W_4(0) \\ W_1'(0) & W_2'(0) & W_3'(0) & W_4'(0) \\ W_1''(0) & W_2''(0) & W_3''(0) & W_4''(0) \\ W_1'''(0) & W_2'''(0) & W_3'''(0) & W_4'''(0) \\ W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) & W_4(1) \\ W_1'(1) & W_2'(1) & W_3'(1) & W_4'(1) \\ W_1''(1) & W_2''(1) & W_3''(1) & W_4''(1) \\ W_1'''(1) & W_2'''(1) & W_3'''(1) & W_4'''(1) \end{vmatrix}$$

меншікті  $w_k$  жиіліктері белгілі болғандықтан,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  және  $\lambda_4$  мәндерін таба аламыз, бұл дегеніміз  $w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)$  функциялары және олардың барлық туындыларын есептеуге мүмкіндік береді. Сондықтан  $D$  матрицасы бізге белгілі.

Бине-Коши формуласынан алатынымыз

$$\Delta(w_k) = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0 \quad (3.36)$$

мұндағы  $f_{k_1 k_2 k_3 k_4} - k_1, k_2, k_3, k_4$  нөмердегі бағандардан құралған  $D$  матрицасының төртінші ретті минорлары. (3.30) теңдеу келесі түрде ашылып жазылады

$$\Delta(w_k) = x_1 f_{1257}(w_k) + x_2 f_{1268}(w_k) + x_3 f_{1368}(w_k) + x_4 f_{1278}(w_k) + x_5 f_{1378}(w_k) + x_6 f_{2478}(w_k) + x_7 f_{1357}(w_k) + x_8 f_{2468}(w_k) + x_9 f_{1256}(w_k) + x_{10} f_{3478}(w_k) = 0 \quad (3.37)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x_1 &= M_{1257} - M_{1356} (f_{1257} = -f_{1356}), & x_5 &= M_{1378} - M_{3457} (f_{1378} = -f_{3457}), \\ x_2 &= M_{1268} - M_{2456} (f_{1268} = -f_{2456}), & x_6 &= M_{2478} - M_{3468} (f_{2478} = -f_{3468}), \\ x_3 &= M_{1368} - M_{2457} (f_{1368} = f_{2457}), & x_4 &= M_{1278} - M_{3456} (f_{1278} = f_{3456}), \\ x_7 &= M_{1357}, & x_8 &= M_{2468}, & x_9 &= M_{1256}, & x_{10} &= M_{3478} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$cw^2 f_{1356} = -f_{1378}, cw^2 f_{2456} = -f_{2478}, cw^2 f_{1357} = -f_{2468}, cw^4 f_{1256} = f_{3478}. \quad (3.39)$$

Осы (3.39) формуласынан ұштарындағы орын ауыстырудың бірінде бекітілу болмаған жағдайға меншікті жиіліктер сәйкес келеді. Бұндағы  $c$  (3.29) өрнегіндегі коэффициент. Мұның маңызын төменде көрсетеміз.

Жоғарыдағы (3.37) теңдеуіне бес  $w_1, \dots, w_5$  меншікті жиіліктерін қойып, белгісіз  $x_1, \dots, x_{10}$  қатысты бес теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің матрицасы келесі түрде болады:

$$\begin{pmatrix} f_{1257}(w_1) & f_{1268}(w_1) & \dots & f_{1256}(w_1) & f_{3478}(w_1) \\ f_{1257}(w_2) & f_{1268}(w_2) & \dots & f_{1256}(w_2) & f_{3478}(w_2) \\ f_{1257}(w_3) & f_{1268}(w_3) & \dots & f_{1256}(w_3) & f_{3478}(w_3) \\ f_{1257}(w_4) & f_{1268}(w_4) & \dots & f_{1256}(w_4) & f_{3478}(w_4) \\ f_{1257}(w_5) & f_{1268}(w_5) & \dots & f_{1256}(w_5) & f_{3478}(w_5) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$x_1, \dots, x_{10}$  айнымалаларын  $a_1, \dots, a_4$  және  $b_1, \dots, b_4$  арқылы өрнектейміз.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2; & x_2 &= -a_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot b_4 - a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2; \\ x_3 &= a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_4 + a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_4 &= -a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2; \\ x_5 &= a_1 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot b_4 + a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_6 &= -a_2 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4; \\ x_7 &= -a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_8 &= -a_2 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4; & x_9 &= a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2; & x_{10} &= a_3 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4 \end{aligned}$$

нәтижесінде сегіз белгісізден тұратын бес теңдеудің жүйесін аламыз.

Бұл жүйе  $C$  матрицасын канондық түрге келтіру арқылы шеттік шарттарындағы төрт белгісізден тұратын сызықты емес бес теңдеу жүйесін

шешуге келтіріледі. Құбырдың бекітілуінің идентификациясы үшін төрт меншікті жиілік жеткіліксіз. Оған сәйкес контрмысал көрсетіледі.

Құбыр бұрындарының бекітілуінің идентификациясы есебі 10 белгісізі бар  $x_i (i = 1, 2, \dots, 10)$  9 сызықты теңдеулерден тұратын (3.37) жүйе арқылы шешілген. Сондықтан бес емес, тоғыз меншікті жиілік қолданылды.

Құбырлардың шекаралық шарттарын қалпына келтіру, сырықтардың бекітілуін меншікті жиіліктері арқылы анықтау, сырықтардың ақауын және дифференциалдық оператордың шеттік шарттарының идентификациясы мәселелері келесі жұмыстарда зерттелді [76, 77, 78, 79, 80].

## ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыс екі бөлімнен тұрады. Бір бөлімінде теориялық мәселелер қарастырылды. Екінші бөлімінде кейбір практикалық маңызды есептер талқыланды.

Алдымен теориялық бөлімінде бірнеше сырықтардан жалғанған конструкцияларға икемделген математикалық модельдер ұсынылды. Әр сырық үш өлшемді дене, бірақ математикалық модельдеу кезінде оларды бір өлшемді нысандар ретінде қарастырылған жөн екендігі көрсетілген. Бұл идеяны басында Тимошенко ұсынған. Бірақ Тимошенконың моделінің қолдану аясы шектеулі. Тимошенко моделі заманауи практикада кездесетін конструкциялардағы инженерлер пікірін толық қанағаттыңдырмайды. Сондықтан бұл диссертациялық жұмыста жаңартылған математикалық моделдер қарастырылады және олардың тиімділігі көрсетіледі. Диссертацияда ұсынылған модельдер графтардағы дифференциалдық теңдеулер жүйелері арқылы сипаталады. Аталған жүйелердің бірнеше ерекшеліктері бар. Жүйеге кіретін дифференциалдық теңдеулердің реттері әртүрлі. Бұл жағыдай көп математикалық қиындықтарды туындатады. Аталған мәселелер диссертацияның бірінші бөлімінде мұқият зерттелген. Бірнеше сырық бір түйіндіде қосылғанда, түйінде қандай математикалық шарттар орындалатындығы табылған. бұрын мән бермеген бірақ маңызды түйіндегі шарттар ұсынылғандығы - назар аударатын жаңалық. Бұл шарттарға сәйкес шекаралық есептер осыған дейін толық зерттелмегендіктен, жаңада талқылауға жасауға келді.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде практикалық мазмұндағы келесі есептер зерттелген:

- көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің сындарлы жылдамдығына әсер ететін шамалар анықталды.
- Иілген құбырдың ішкі қысымы табылды және меншікті жиіліктерін табу алгоритімі ұсынылды.
- Құбырдың шеттерінің бекітілулері 5 жиілікпен бір мәнді анықталатындығы көрсетілді.
- Жіңішке серпімді сырықтар үшін шектік теңдеулер жүйелері ұсынылды.
- Түйінге байланған бірнеше жіңішке иілген сырықтардың шектік теңдеулер жүйесі қорытылып шығарылды.
- Графтардағы дифференциалдық теңдеулердің меншікті жиіліктері нақты болатындай шекаралық шарттар ұсынылды.
- Жиіліктер бойынша шектік сырықтардың шекаралық бекітілулерін табу алгоритімі ұсынылды.

## Қолданылған әдебиеттер

- [1] Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: 1975
- [2] Sokolnikoff I. S. Mathematical theory of elasticity. McGraw-Hill, New York, 1956. P 239
- [3] Галактионов Е. В., Тропп Э. А. Асимптотический метод расчета термоупругих напряжений в тонком стержне // Известия АН СССР. Сер. Физ. 1976, Т. 40, N 7, с. 1399-1406
- [4] Елисеев В. В., Орлов С. Г. Асимптотическое расщемление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со
- [5] Назаров С. А. Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Пробл. матем. анализа. СПб: Издательство СПбГУ. 1997. вып 17 с. 101-152.
- [6] Sanchoz-Hubert J., Sanchoz-Palencia E. Couplage flexion- torsion-traction dans les poutres anisotropes a section hetoregene// C.R. Acad. Sci. Paris. Ser 2. 1991. Т. 312. p 337-344.
- [7] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна// Успехи матем.наук. 1988. Т. 43, N 5. с.55-98
- [8] Назаров С. А. Неравенство Корна асимптотически точные для тонких областей// Вестник СПбГУ. Сер.матем.,мех.,астр.1992.N 8. С.19-24
- [9] Kondratiev V.A., Oleinik O.A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications//Rendiconti di Matematica. Ser.VII. 1990. V. 10. P. 641
- [10] Ляв А. Математическая теория упругости М.-Л: главная редакция обще технической литературы и номографи1935.
- [11] В.А. Светлицкий, «Механика стержней» // Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1987.
- [12] С.Г. Лехницкий, «Кручение анизотропных и неоднородных стержней» // М.:Наука, 1971.
- [13]. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержне. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга. 2002.
- [14] Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких. Алгебра и анализ. 1995, том 7, выпуск 5, 1-92.
- [15] В. Kanguzhin, L. Zhapsarbaeva, Zh. Madibaiuly, «Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree», *Eurasian Math. J.*, 10:1 (2019), pp. 16-29.
- [16] L.K. Zhapsarbaeva, B.E. Kanguzhin, M.N. Konyrkulzhayeva, «Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph», *Ufa. Math. J.*, 9:4 (2017), pp. 35-43.
- [17] P. Kuchment, «Graph models of wave propagation in this structures» // *Waves in Random Media*, Vol. 12 (2002), pp 1-24.



- [18] P. Kuchment, H. Zeng, «Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph» // *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001), pp. 671-700.
- [19] P. Exner, O. Post, «Convergence of spectra of graph – like thin manifolds» // *J. Geom. Phys.* 54 (2005), pp. 77-115.
- [20] O. Post, «Spectral Analysis on Graph-like Spaces» // *Lecture Notes in Mathematics* 2039 /vol. 2039.
- [21] С.А. Назаров, «Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких» // *Алгебра и анализ.* 1995. Т. 7, №5. с. 1-92.
- [22] С.А. Назаров, А.С. Слуцкий, «Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование» // *Известия РАН. сер. матем.* 2000. Т. 64, №3, с. 97-131.
- [23] S. Molchanov, B Vainberg, «Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics» // *Comm. Math. Phys.* 273, No. 2 (2007), pp. 533-559.
- [24] F. Harary, *Graph theory.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [25] B.E.Kanguzhin, A.A.Anijarov, *Well-posed problems for the Laplace operators in a punctured disk.* *Math.Notes.* 89 (2011), no. 6., 819–829.
- [26] B.E.Kanguzhin, N.E. Tokmagambetov, *Resolvents of well-posed problems for finite-rank perturbations of the polyharmonic operator in a. punctured domain.* *Siberian Math.Zh.* 57 (2016), нет. 2., 265–273.
- [27] B.K. Kokebaev, M. Otelbaev, A.N. Shynybekov, *To questions of expansion and restrictions of operators.* , *Dokl. Akad. Nauk,* 271 (1983), no. 6., 1307–1311. (in Russian)
- [28] M.A. Naimark, *Linear differential operators.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2009.
- [29] M. Otelbaev, A.N. Shynybekov, *On well-posed problems Bitsadze-Samarskyi type.* *Dokl. Akad. Nauk,* 265 (1982), no. 4., 815–819 (in Russian).
- [30] C.R Paul, *Fundamentals of Electric Circuit Analysis.* John Wiley and Sons. 2001.
- [31] Yu.V. Pokornyi, et al, *Differential equations on geometrical graphs.* Fizmatlit, Moscow, 2005. (in Russian)
- [32] O. Post, *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces.* Springer Science and Business Media. 2039. (2012).
- [33] S. Tsoi , S.M. Tskhai, *Applied graph theory.* Nauka, Alma-ata, 1971 (in Russian).
- [34] V.A. Yurko, *On recovering Sturm-Liouville operators on graphs.* *Math. Notes.* 79 (2005), no. 3-4., 572-582.
- [35] J. von Below, D. Mugnolo, *The spectrum of the Hilbert space valued second derivative with general self- adjoint boundary conditions.* *Linear Algebra and its Applications.* 439 (2013), 1792–1814.
- [36] M.G. Zavgorodnij, *Adjoint and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph.* *Differential Eqations,* Pleades Publishing. 50 (2014), no. 4., 446–456.

- [37] L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin, M.N. Konyrkulzhayeva Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph. *Ufimsk. Mat. Zh.* 9 (2017), no. 4., 36–44.
- [38] L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin, N. Koshkarbayev On asymptotics by spectral parameter of the solutions of differential equations on a tree. *Mat. Zhur.* 17 (2017), no. 4., 37–49.
- [39] Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. — М.: Физматлит, 2009.
- [40] А. М. Ахтямов, Аюпова А. Р. Идентификация точечной массы на стержне.
- [41] Inverse boundary problems for intermediate springs on a rod with geometrical symmetry Daulet B. Nurakhmetov, Serik A. Jumabayev *Electron. J. Differential Equations* 2017 (33), 1-10
- [42] А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов, А. А. Ахтямова, “Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013, № 3, 114–129
- [43] Мадибайулы Ж. Об одной задаче восстановления сосредоточенных масс по частотам изгибных колебаний стержня. Конференция «XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых ЛОМОНОСОВ – 2018», 20.05.2018-21.05.2018
- [44] Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 182 с.
- [45] Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. мир, 1985. — 254 с
- [46] Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. № 1. С. 21-26
- [47] Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация закрепления трубопровода с использованием минимального количества собственных частот // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1 (45). С. 95–107
- [48] Кангужин Б.Е Мадибайулы Ж. Идентификация закрепления криволинейного трубопровода протекающей по нему жидкостью. XVII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2018», Казань, РФ, 23.11.2018-28.11.2018
- [49] Мадибайулы Ж. Восстановление площадей сечений продольно колеблющегося стержня по его частотам. Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Дня работников науки республики Казахстан (06.04.2018-10.04.2018)
- [50] Мадибайулы Ж. Устойчивость трубы с протекающей по ней жидкостью «Международная конференция, Математика, Механика, Прикладные вопросы» Караганда, 12.06.2019-13.06.2019
- [51] Parkinson, G. V., and Brooks, N. P. H. “On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders”, 1961, *ASME J. Appl. Mech.*, 28, pp. 252–258.

- [52] Novak M. Galloping and vortex induced oscillation of structures.— Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Wind Effects on Buildings and Structures. — Tokyo: Science Council of Japan, 1971
- [53] ] Parkinson, G. V., Smith J. D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator. – Quart. J. Mech. And Appl. Math., 1964, 17, p. 225.
- [54] Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. - 2001.- Т. 65, вып. 2.- С. 290-298.
- [55] Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем/ Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
- [56] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). - М.: Наука, 1968. – 503 с.
- [57] Ланкастер П. Теория матриц/ Пер. с англ. - М.: Наука, 1982. – 272 с.
- [58] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
- [59] Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М. : Наука, 1969. 182 с.
- [60] Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М. : Мир, 1985. 254 с.
- [61] Вибрации в технике: справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
- [62] Chu M.T., Golub G.H. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. Oxford : University Press, 2005.
- [63] Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М. : Наука, 1968. 503 с.
- [64] Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
- [65] Хакимов А. Г. Определение плотности жидкости и внутреннего давления в трубопроводе по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2014. № 1(95). С. 37–43.
- [66] Абзалимов Р.Р., Саляхова Е.В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделёнными краевыми условиями // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 11. С. 3–11
- [67] Гнуни В.Ц., Оганесян З.Б. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний // Известия Академии наук Армении. Механика (проблемы механики сплошной среды и конструкций). 1991. Т. 44, № 5. С. 9–15.
- [68] Ватульян А.О., Осипов А.В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестник ДГТУ. 2012. № 8(69). С. 34–40.

- [69] Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
- [70] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Т. 45, № 6. С. 83–89.
- [71] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
- [72] Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная математика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 1. С. 139–147. Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45) 107
- [73] Ахтямов А.М., Шагиев В.Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, № 1. С. 21–26.
- [74] Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. О единственности решения и корректности задачи определения параметров закрепления трубы с текущей в ней жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 2(336). С. 32–45.
- [75] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
- [76] Кангужин Б.Е, Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора, Вестник КазНУ, серия математика, 2019, № 3 (103), с. 13-18
- [77] А.Т.Касимов , С.Р.Жолмагамбетов , О.Хабидолда , Мадибайулы Ж, А.А.Касимова  
Численное моделирование напряженно-деформированного о состояния слоистых пластин с произвольным пакетом слоев на основе неклассической теории изгиба №1 2019 вестник казниту
- [78] Ахмедиев С. К, О.Хабидолда, Мадибайулы Ж., Деформированное состояние консольного стержня ступенчато-переменного поперечного сечения  
;вестник казниту; серия физико-математические науки, казахстан, 2019 г., 135, #5
- [79] Кангужин Б.Е , Даирбаева Г, Мадибайулы Ж., Единственность восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров. Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science. No 4(104).
- [80] Z.Yu. Fazullin, Zh. Madibaiuly, L.Yermekkyzy, Control of vibrations of elastically fixed objects using analysis of eigenfrequencies//International Journal of Mathematics and Physics 11, No2, 27 (2020)